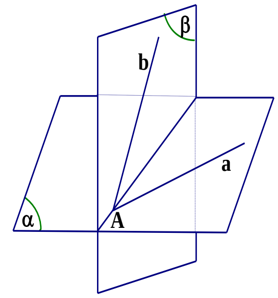
HÌNH KHÔNG GIAN 11 - GIẢI HÌNH 11 LỚP HỌC THÊM TOÁN LÝ HÓA



Dạng 1 : Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

Phương pháp : • Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (α) và (β)
• Đường thẳng đi qua hai điểm chung ấy là giao tuyến cần tìm

Chú ý : Để tìm chung của (α) và (β) thường tìm 2 đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mp giao điểm nếu có của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng

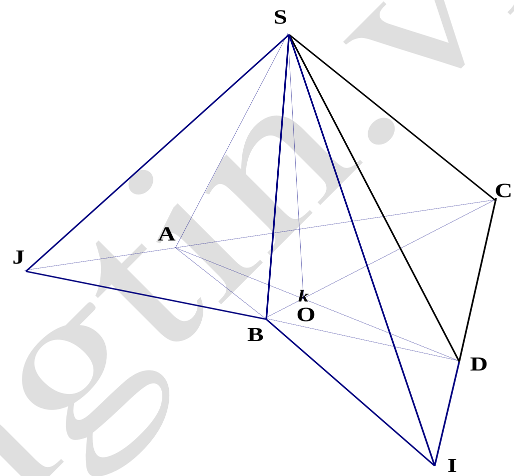
Bài tập :

1. Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song và điểm $S \notin (\alpha)$.

a. Xác định giao tuyến của (SAC) và *(SBD)*

b. Xác định giao tuyến của *(SAB)* **và** *(SCD)*

c. Xác định giao tuyến của *(SAD)* **và** *(SBC)*



Giải

a. Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD)

Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SBD)

Trong (α), gọi $O = AC \cap BD$

• $O \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$

• $O \in BD$ mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD)$

$\Rightarrow O$ là điểm chung của *(SAC)* và *(SBD)*

Vậy : SO là giao tuyến của *(SAC)* và *(SBD)*

b. Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD)

Ta có: S là điểm chung của *(SAC)* và *(SBD)*

Trong (α) , AB không song song với CD

Gọi $I = AB \cap CD$

• $I \in AB$ mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB)$

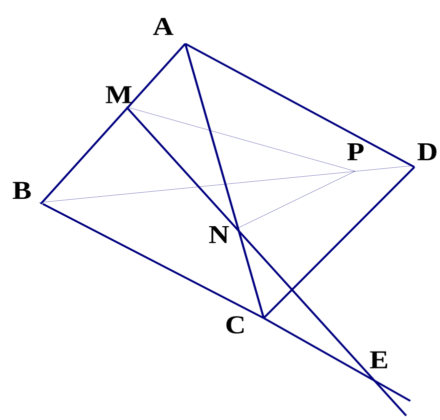
• $I \in CD$ mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$

$\Rightarrow I$ là điểm chung của *(SAB)* và *(SCD)*

Vậy : SI là giao tuyến của *(SAB)* và *(SCD)*

c. Tương tự câu a, b

2. Cho bốn điểm *A,B,C,D* **không cùng thuộc một mặt phẳng . Trên các đoạn thẳng** *AB, AC, BD* **lần lượt lấy các điểm** *M, N, P* **sao cho** *MN* **không song song với** *BC*. **Tìm giao tuyến của** *(BCD)* **và** *(MNP)*



Giải

• $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$

• $P \in (MNP)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của *(BCD)* và *(MNP)*

Trong mp *(ABC)* , gọi $E = MN \cap BC$

• $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

• $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của *(BCD)* và *(MNP)*

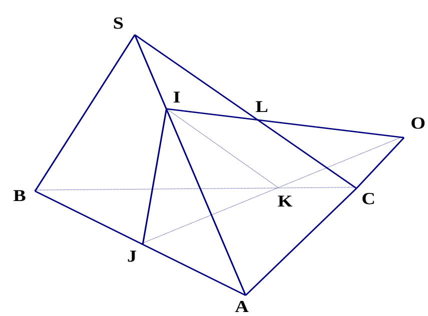
Vậy : PE là giao tuyến của *(BCD)* và *(MNP)*

3. Cho tam giác *ABC* **và một điểm** *S* **không thuộc mp** *(ABC)* **, một điểm** *I* **thuộc đoạn** *SA* **. Một đường thẳng** *a* **không song song với** *AC* **cắt các cạnh** *AB, BC* **theo thứ tự tại** *J , K***. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau :**

a. mp *(I,a)* **và mp** *(SAC)*

b. mp *(I,a)* **và mp** *(SAB)*

c. mp *(I,a)* **và mp** *(SBC)*



Giải

a. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SAC) :

Ta có: • $I \in SA$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$

• $I \in (I,a)$

$\Rightarrow I$ là điểm chung của hai mp *(I,a)* và *(SAC)*

Trong *(ABC)*, a không song song với AC

Gọi $O = a \cap AC$

• $O \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$

• $O \in (I,a)$

$\Rightarrow O$ là điểm chung của hai mp (I,a) và (SAC)

Vậy : IO là giao tuyến của hai mp (I,a) và (SAC)

b. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SAB) : là JI

c. Tìm giao tuyến của mp (I,a) với mp (SBC)

Ta có : K là điểm chung của hai mp (I,a) và mp (SBC)

Trong mp (SAC) , gọi $L = IO \cap SC$

• $L \in SC$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow L \in (SBC)$

• $L \in IO$ mà $IO \subset (I,a) \Rightarrow L \in (I,a)$

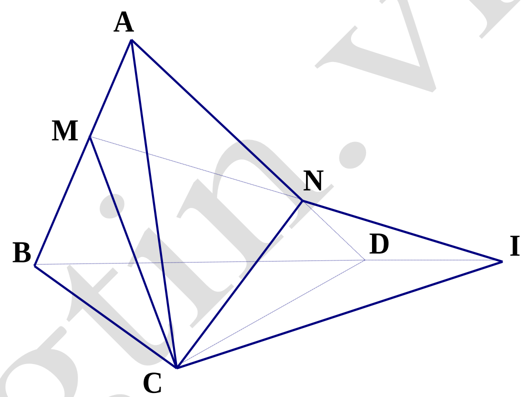
$\Rightarrow L$ là điểm chung của hai mp (I,a) và (SBC)

Vậy: KL là giao tuyến của hai mp (I,a) và (SBC)

4. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mp

a. Chứng minh AB và CD chéo nhau

b. Trên các đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BD tại I . Hỏi điểm I thuộc những mp nào . Xđ giao tuyến của hai mp (CMN) và (BCD)



Giải

a. Chứng minh AB và CD chéo nhau :

Giả sử AB và CD không chéo nhau

Do đó có mp (α) chứa AB và CD

$\Rightarrow A, B, C, D$ nằm trong mp (α) mâu thuẩn giả thuyết

Vậy : AB và CD chéo nhau

b. Điểm I thuộc những mp :

• $I \in MN$ mà $MN \subset (ABD) \Rightarrow I \in (ABD)$

• $I \in MN$ mà $MN \subset (CMN) \Rightarrow I \in (CMN)$

• $I \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow I \in (BCD)$

Xđ giao tuyến của hai mp (CMN) và (BCD) *là CI*

5. Cho tam giác ABC nằm trong mp (P) và a là mộtđường thẳng nằm trong mp (P) và không song song với AB và AC . S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (P) và A' là một điểm thuộc SA .

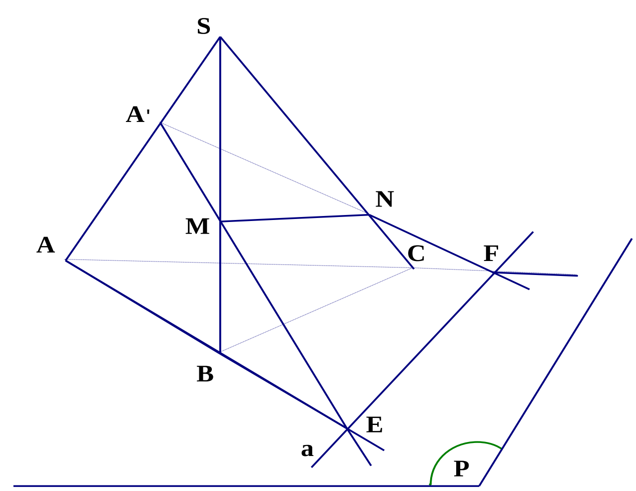
Xđ giao tuyến của các cặp mp sau

a. mp (A',a) và (SAB)

b. mp (A',a) và (SAC)

c. mp (A',a) và (SBC)

Giải



a. Xđ giao tuyến của mp (A',a) và (SAB)

• $A' \in SA$ mà $SA \subset (SAB) \Rightarrow A' \in (SAB)$

• $A' \in (A',a)$

$\Rightarrow A'$ là điểm chung của (A',a) và (SAB)

Trong (P) , ta có a không song song với AB

Gọi $E = a \cap AB$

• $E \in AB$ mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$

• $E \in (A',a)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (A',a) và (SAB)

Vậy: $A'E$ là giao tuyến của (A',a) và (SAB)

b. Xđ giao tuyến của mp (A',a) và (SAC)

• $A' \in SA$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow A' \in (SAC)$

• $A' \in (A',a)$

$\Rightarrow A'$ là điểm chung của (A',a) và (SAC)

Trong (P) , ta có a không song song với AC

Gọi $F = a \cap AC$

• $F \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow F \in (SAC)$

• $E \in (A',a)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (A',a) và (SAC)

Vậy: $A'F$ là giao tuyến của (A',a) và (SAC)

c. Xđ giao tuyến của (A',a) và (SBC)

Trong (SAB) , gọi $M = SB \cap A'E$

• $M \in SB$ mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC)$

• $M \in A'E$ mà $A'E \subset (A',a) \Rightarrow M \in (A',a)$

$\Rightarrow M$ là điểm chung của mp (A',a) và (SBC)

Trong (SAC), gọi $N = SC \cap A'F$

- $N \in SC$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow N \in (SBC)$
- $N \in A'F$ mà $A'F \subset (A',a) \Rightarrow N \in (A',a)$

$\Rightarrow N$ là điểm chung của mp (A',a) và (SBC)

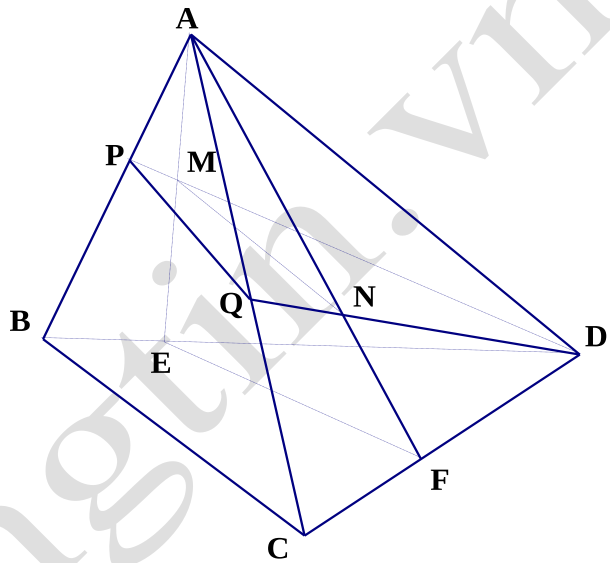
Vậy: MN là giao tuyến của (A',a) và (SBC)

6. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

a. (AMN) và (BCD)

b. (DMN) và (ABC)

Giải



a. Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

- $E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$
- $E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của mp (AMN) và (BCD)

Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của mp (AMN) và (BCD)

Vậy: EF là giao tuyến của mp (AMN) và (BCD)

b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của mp (DMN) và (ABC)

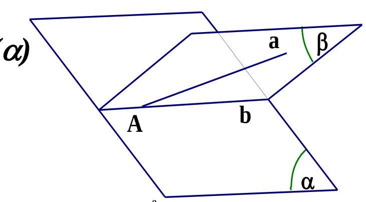
Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABCA)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của mp (DMN) và (ABC)

Vậy: PQ là giao tuyến của mp (DMN) và (ABC)

Dạng 2 : Xác định giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α)



Phương pháp :
- Tìm đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (α)
- Giao điểm của a và b là giao đt a và mặt phẳng (α)

Chú ý : Đường thẳng b thường là giao tuyến của mp (α) và mp $(\beta) \supset a$
Cần chọn mp (β) chứa đường thẳng a sao cho giao tuyến của mp (α) và mp (β) để xác định và giao tuyến không song song với đường thẳng a

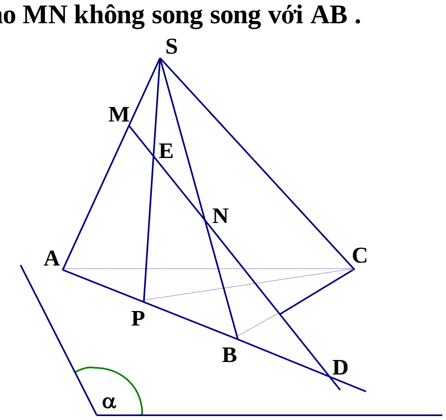
Bài tập :

1. Trong mp (α) cho tam giác ABC . Một điểm S không thuộc (α) . Trên cạnh AB lấy một điểm P và trên các đoạn thẳng SA, SB ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho MN không song song với AB .

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (α)

Giải



a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SPC)

Cách 1 : Trong (SAB) , gọi $E = SP \cap MN$

- $E \in SP$ mà $SP \subset (SPC) \Rightarrow E \in (SPC)$
- $E \in MN$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$

Cách 2 :
- Chọn mp phụ $(SAB) \supset MN$
- $(SAB) \cap (SPC) = SP$
- Trong (SAB), gọi $E = MN \cap SP$
  $E \in MN$
  $E \in SP$ mà $SP \subset (SPC)$

Vậy : $E = MN \cap (SPC)$

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mp (α)

<u>*Cách 1*</u>: Trong (SAB) , MN không song song với AB

Gọi $D = AB \cap MN$

- $D \in AB$ mà $AB \subset (\alpha) \Rightarrow D \in (\alpha)$
- $D \in MN$

Vậy: $D = MN \cap (\alpha)$

<u>*Cách 2*</u> :

- Chọn mp phụ $(SAB) \supset MN$
- $(SAB) \cap (\alpha) = AB$
- Trong (SAB) , MN không song song với AB

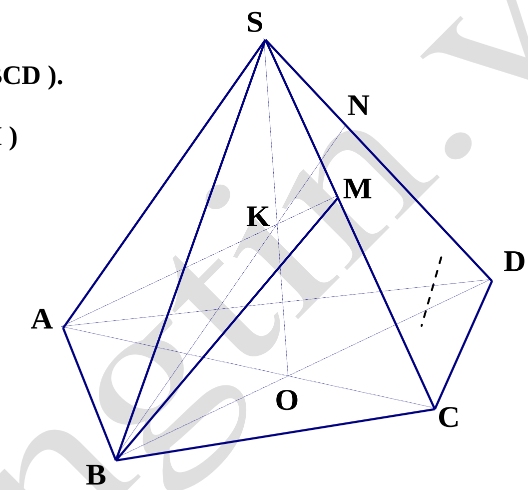
Gọi $D = MN \cap AB$

$D \in AB$ mà $AB \subset (\alpha) \Rightarrow D \in (\alpha)$

$D \in MN$

Vậy : $D = MN \cap (\alpha)$

2. Cho tứ giác ABCD và một điểm S không thuộc mp (ABCD). Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM)



<u>Giải</u>

- Chọn mp phụ $(SBD) \supset SD$
- Tìm giao tuyến của hai mp (SBD) và (ABM)
  - Ta có B là điểm chung của (SBD) và (ABM)
  - Tìm điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM)

Trong (ABCD) , gọi $O = AC \cap BD$

Trong (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$

$K \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow K \in (SBD)$

$K \in AM$ mà $AM \subset (ABM) \Rightarrow K \in (ABM)$

$\Rightarrow$ K là điểm chung của (SBD) và (ABM)

$\Rightarrow (SBD) \cap (ABM) = BK$

- Trong (SBD) , gọi $N = SD \cap BK$

$N \in BK$ mà $BK \subset (AMB) \Rightarrow N \in (ABM)$

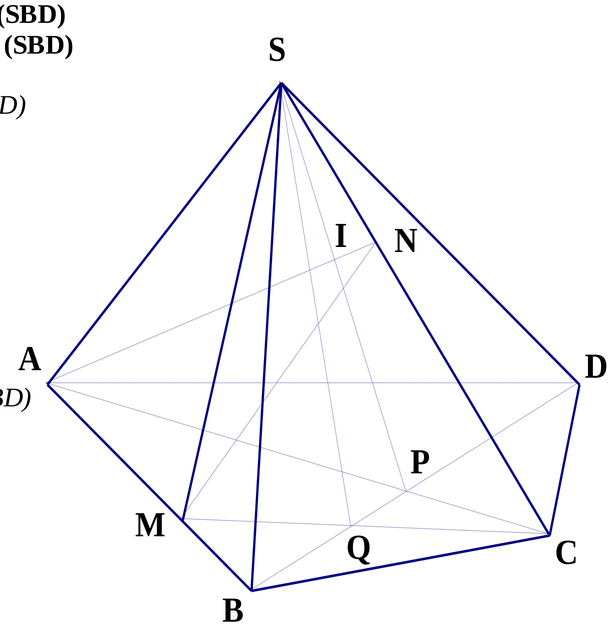
$N \in SD$

Vậy : $N = SD \cap (ABM)$

3. Cho tứ giác ABCD và một điểm S không thuộc mp (ABCD). Trên đoạn AB lấy một điểm M , Trên đoạn SC lấy một điểm N (M , N không trùng với các đầu mút) .

a. Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD)

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD)



Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD)

- Chọn mp phụ $(SAC) \supset AN$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)

Trong (ABCD) , gọi $P = AC \cap BD$

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SP$

- Trong (SAC), gọi $I = AN \cap SP$

$I \in AN$

$I \in SP$ mà $SP \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

Vậy : $I = AN \cap (SBD)$

b. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD)

- Chọn mp phụ $(SMC) \supset MN$
- Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD)

Trong (ABCD) , gọi $Q = MC \cap BD$

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SQ$

- Trong (SMC), gọi $J = MN \cap SQ$

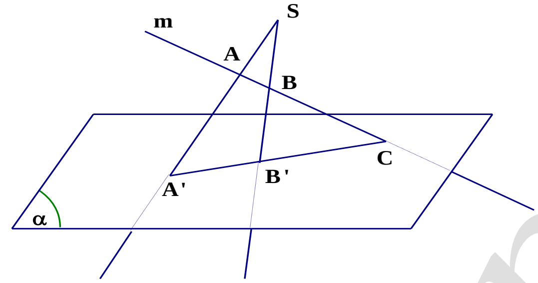
$J \in MN$

$J \in SQ$ mà $SQ \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

Vậy: $J = MN \cap (SBD)$

4. Cho một mặt phẳng (α) và một đường thẳng m cắt mặt phẳng (α) tại C . Trên m ta lấy hai điểm A, B và một điểm S trong không gian . Biết giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (α) là điểm A' . Hãy xác định giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (α)

Giải



- Chọn mp phụ (SA'C) ⊃ SB
- Tìm giao tuyến của (SA'C) và (α)

  Ta có (SA'C) ∩ (α) = A'C
- Trong (SA'C), gọi B' = SB ∩ A'C

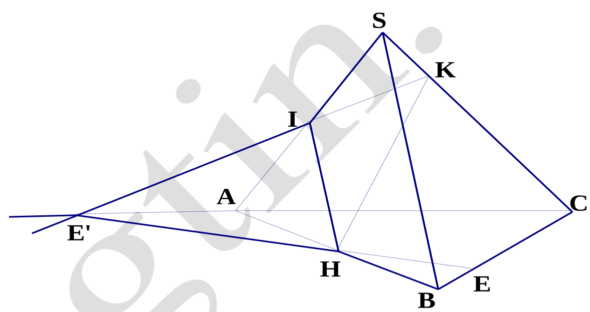
  B'∈ SB mà SB ⊂ (SA'C) ⇒ B' ∈ (SA'C)

  B' ∈ A'C mà A'C ⊂ (α) ⇒ B' ∈ (α)

Vậy : B'= SB ∩ (α)

5. Cho bốn điểm A, B , C, S không cùng ở trong một mặt phẳng . Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB .Trên SC lấy điểm K sao cho : CK = 3KS.
Tìm giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK)

Giải



- Chọn mp phụ (ABC) ⊃ BC
- Tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK)

  Trong (SAC) ,có IK không song song với AC

  Gọi E' = AC ∩ IK

  ⇒ (ABC) ∩ (IHK) = HE'
- Trong (ABC), gọi E = BC ∩ HE'

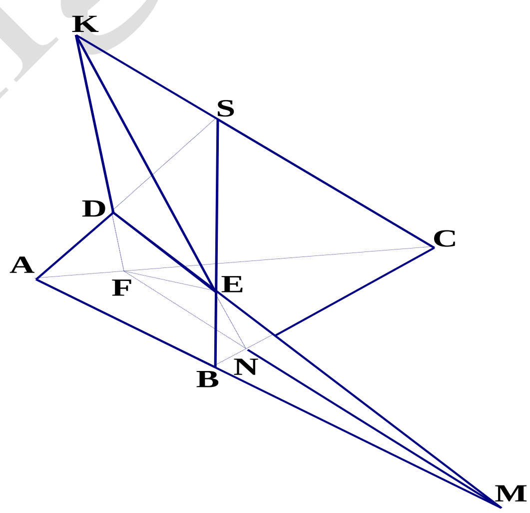
  E ∈ BC mà BC ⊂ (ABC) ⇒ E ∈ (ABC)

  E ∈ HE' mà HE' ⊂ (IHK) ⇒ E ∈ (IHK)

Vậy: E = BC ∩ (IHK)

6. Cho tứ diện SABC .Gọi D là điểm trên SA , E là điểm trên SB và F là điểm trên AC (DE và AB không song song) .
a. Xđ giao tuyến của hai mp (DEF) và (ABC)
b. Tìm giao điểm của BC với mặt phẳng (DEF)
c. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (DEF)

Giải



hình 1

a. Xđ giao tuyến của hai mp (DEF) và (ABC)

Ta có : F là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

Trong (SAB) , AB không song song với DE

Gọi M = AB ∩ DE
- M ∈ AB mà AB ⊂ (ABC) ⇒ M ∈ (ABC)
- M ∈ DE mà DE ⊂ (DEF) ⇒ M ∈ (DEF)

⇒ M là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

Vậy: FM là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF)

b. Tìm giao điểm của BC với mặt phẳng (DEF)

- Chọn mp phụ (ABC) ⊃ BC
- Tìm giao tuyến của (ABC) và (DEF)

  Ta có (ABC) ∩ (DEF) = FM
- Trong (ABC), gọi N = FM ∩ BC

  N∈ BC

  N ∈ FM mà FM ⊂ (DEF) ⇒ N ∈ (DEF)

Vậy: N = BC ∩ (DEF)

c. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (DEF)

- Chọn mp phụ (SBC) ⊃ SC
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (DEF)

  Ta có: E là điểm chung của (SBC) và (DEF)

  o N ∈ BC mà BC ⊂ (SBC) ⇒ N ∈ (SBC)

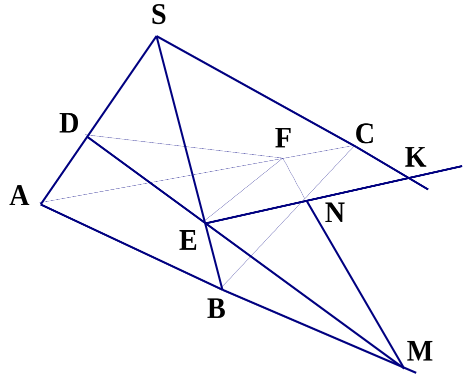
  o N ∈ FM mà FM ⊂ (DEF) ⇒ N ∈ (DEF)

  ⇒ N là điểm chung của (SBC) và (DEF)

  Ta có (SBC) ∩ (DEF) = EN
- Trong (SBC), gọi K = EN ∩ SC

  K∈ SC

  K ∈ EN mà EN ⊂ (DEF) ⇒ K ∈ (DEF)

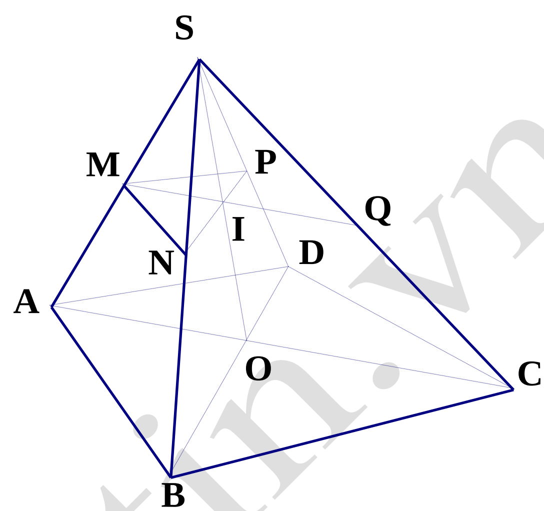


hình 2

Vậy: K = SC $\cap$ (DEF)

7. Cho hình chóp S.ABCD .Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB ,SD.
a. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)
b. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP)

Giải



a. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)

- Chọn mp phụ (SBD) $\supset$ SO
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (MNP)

Ta có N $\in$ MN mà MN $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ N $\in$ (MNP)
N $\in$ SB mà SB $\subset$ (SBD) $\Rightarrow$ N $\in$ (SBD)
$\Rightarrow$ N là điểm chung của (SBD) và (MNP)

P $\in$ MP mà MN $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ P $\in$ (MNP)
P $\in$ SD mà SD $\subset$ (SBD) $\Rightarrow$ P $\in$ (SBD)
$\Rightarrow$ P là điểm chung của (SBD) và (MNP)
$\Rightarrow$ (MNP) $\cap$ (SBD) = NP

- Trong (SBD), gọi I = SO $\cap$ NP

I $\in$ SO
I $\in$ NP mà NP $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNP)

Vậy: I = SO $\cap$ (MNP)

b. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP)

- Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ SC
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP)

Ta có M $\in$ MN mà MN $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ M $\in$ (MNP)
M $\in$ SA mà SA $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ M $\in$ (SAC)
$\Rightarrow$ M là điểm chung của (SAC) và (MNP)
I $\in$ MI mà MI $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNP)
I $\in$ SO mà SO $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ I $\in$ (SAC)
$\Rightarrow$ I là điểm chung của (SAC) và (MNP)
$\Rightarrow$ (SAC) $\cap$ (SBD) = MI

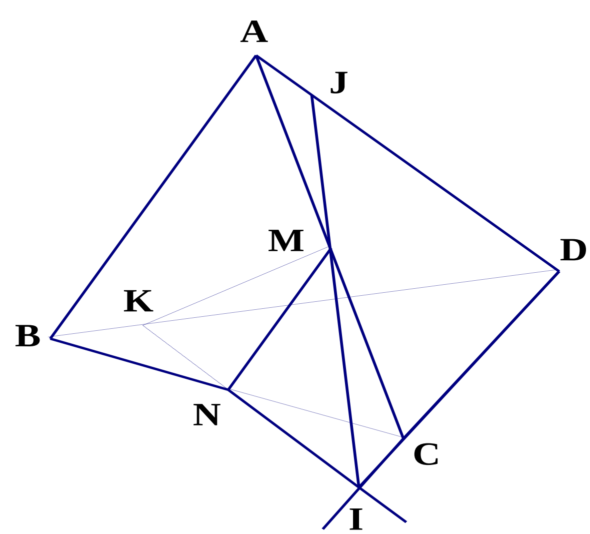
- Trong (SAC), gọi Q = SC $\cap$ MI

Q$\in$ SC
Q$\in$ MI mà MI $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ Q $\in$ (MNP)

Vậy: Q = SC $\cap$ (MNP)

8. Cho tứ diện ABCD .Gọi M,N lần lượt là trung điểm AC và BC . K là điểm trên BD và không trùng với trung điểm BD .
a. Tìm giao điểm của CD và (MNK)
b. Tìm giao điểm của AD và (MNK)

Giải



a. Tìm giao điểm của CD và (MNK) :

- Chọn mp phụ (BCD) $\supset$ SC
- Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNK)

Ta có N $\in$ (MNK)
N $\in$ BC mà BC $\subset$ (BCD) $\Rightarrow$ N $\in$ (BCD)
$\Rightarrow$ N là điểm chung của (BCD) và (MNK)
K $\in$ (MNK)
K $\in$ BD mà BD $\subset$ (BCD) $\Rightarrow$ K $\in$ (BCD)
$\Rightarrow$ K là điểm chung của (BCD) và (MNK)
$\Rightarrow$ (BCD) $\cap$ (MNK) = NK

- Trong (BCD), gọi I = CD $\cap$ NK

I$\in$ CD
I$\in$ NK mà NK $\subset$ (MNK) $\Rightarrow$ I $\in$ (MNK)

Vậy: I = CD $\cap$ (MNK)

b. Tìm giao điểm của AD và (MNK)

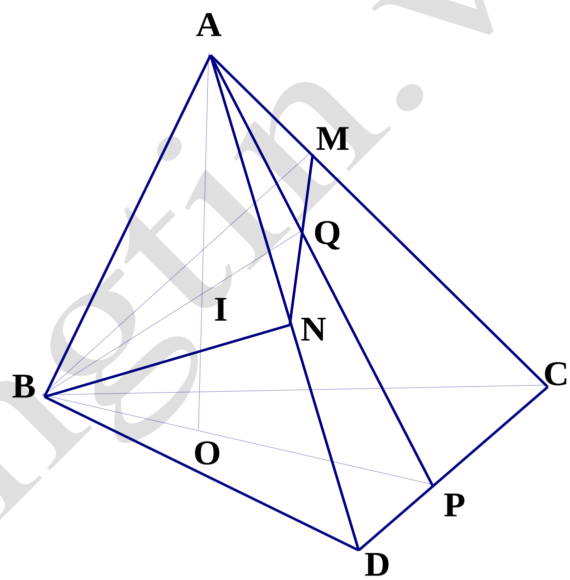
- Chọn mp phụ (ACD) $\supset$ AD
- Tìm giao tuyến của (ACD) và (MNK)

Ta có: $M \in (MNK)$
$M \in AC$ mà $AC \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD)$
$\Rightarrow$ M là điểm chung của (ACD) và (MNK)
$I \in NK$ mà $NK \subset (MNK) \Rightarrow I \in (MNK)$
$I \in CD$ mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow I \in (ACD)$
$\Rightarrow$ I là điểm chung của (ACD) và (MNK)
$\Rightarrow (ACD) \cap (MNK) = MI$

- Trong (BCD), gọi $J = AD \cap MI$
$J \in AD$
$J \in MI$ mà $MI \subset (MNK) \Rightarrow J \in (MNK)$

Vậy: $J = AD \cap (MNK)$

9. Cho tứ diện ABCD .Gọi M,N là hai điểm trên AC và AD . O là điểm bên trong tamgiác BCD. Tìm giao điểm của :
a. MN và (ABO)
b. AO và (BMN)



Giải

a. Tìm giao điểm của MN và (ABO):

- Chọn mp phụ $(ACD) \supset MN$
- Tìm giao tuyến của (ACD) và (ABO)

Ta có : A là điểm chung của (ACD) và (ABO)
Trong (BCD), gọi $P = BO \cap DC$
$P \in BO$ mà $BO \subset (ABO) \Rightarrow P \in (ABO)$
$P \in CD$ mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow P \in (ACD)$
$\Rightarrow$ P là điểm chung của (ACD) và (ABO)
$\Rightarrow (ACD) \cap (ABO) = AP$

- Trong (ACD), gọi $Q = AP \cap MN$
$Q \in MN$
$Q \in AP$ mà $AP \subset (ABO) \Rightarrow Q \in (ABO)$

Vậy: $Q = MN \cap (ABO)$

b. Tìm giao điểm của AO và (BMN) :

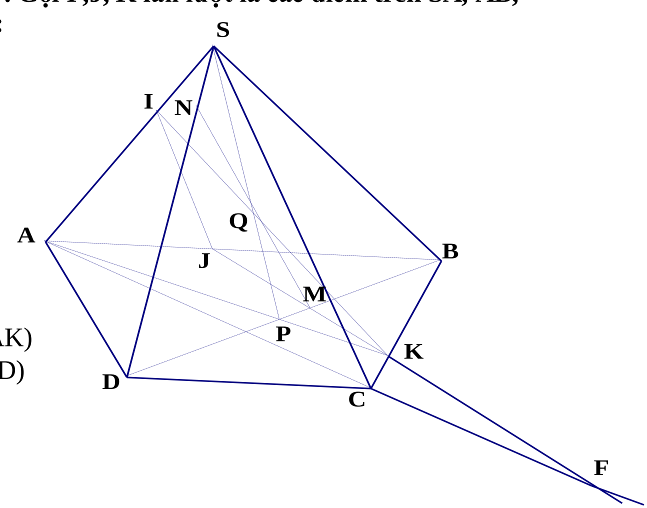
- Chọn mp $(ABP) \supset AO$
- Tìm giao tuyến của (ABP) và (BMN)

Ta có : B là điểm chung của (ABP) và (BMN)
$Q \in MN$ mà $MN \subset (BMN) \Rightarrow Q \in (BMN)$
$Q \in AP$ mà $AP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$
$\Rightarrow$ Q là điểm chung của (ABP) và (BMN)
$\Rightarrow (ABP) \cap (BMN) = BQ$

- Trong (ABP), gọi $I = BQ \cap AO$
$I \in AO$
$I \in BQ$ mà $BQ \subset (BMN) \Rightarrow I \in (BMN)$

Vậy: $I = AO \cap (BMN)$

10. Trong mp (α) cho hình thang ABCD , đáy lớn AB . Gọi I ,J, K lần lượt là các điểm trên SA, AB, BC (K không là trung điểm BC) . Tìm giao điểm của :
a. IK và (SBD)
b. SD và (IJK)
c. SC và (IJK)



Giải

a. Tìm giao điểm của IK và (SBD)

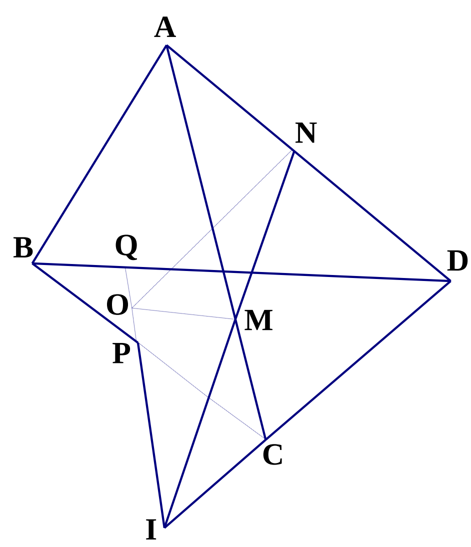
- Chọn mp phụ $(SAK) \supset IK$
- Tìm giao tuyến của (SAK) và (SBD)

Ta có : S là điểm chung của (SAK) và (SBD)
Trong (ABCD), gọi $P = AK \cap BD$
$P \in AK$ mà $AK \subset (SAK) \Rightarrow P \in (SAK)$
$P \in BD$ mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD)$
$\Rightarrow$ P là điểm chung của (SAK) và (SBD)
$\Rightarrow (SAK) \cap (SBD) = SP$

- Trong (SAK), gọi $Q = IK \cap SP$

Q ∈ IK
Q ∈ SP mà SP ⊂ (SBD) ⇒ Q ∈ (SBD)
Vậy: Q = IK ∩ (SBD)
b. Tìm giao điểm của SD và (IJK) :
• Chọn mp phụ (SBD) ⊃ SD
• Tìm giao tuyến của (SBD) và (IJK)
Ta có : Q là điểm chung của (IJK) và (SBD)
Trong (ABCD), gọi M = JK ∩ BD
M ∈ JK mà JK ⊂ (IJK) ⇒ M ∈ (IJK)
M ∈ BD mà BD ⊂ (SBD) ⇒ M ∈ (SBD)
⇒ M là điểm chung của (IJK) và (SBD)
⇒ (IJK) ∩ (SBD) = QM
• Trong (SBD), gọi N = QM ∩ SD
N ∈ SD
N ∈ QM mà QM ⊂ (IJK) ⇒ N ∈ (IJK)
Vậy: N = SD ∩ (IJK)
c. Tìm giao điểm của SC và (IJK) :
• Chọn mp phụ (SAC) ⊃ SC
• Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJK)
Ta có : I là điểm chung của (IJK) và (SAC)
Trong (ABCD), gọi E = AC ∩ JK
E ∈ JK mà JK ⊂ (IJK) ⇒ E ∈ (IJK)
E ∈ AC mà AC ⊂ (SAC) ⇒ E ∈ (SAC)
⇒ E là điểm chung của (IJK) và (SAC)
⇒ (IJK) ∩ (SAC) = IE
• Trong (SAC), gọi F = IE ∩ SC
F ∈ SC
F ∈ IE mà IE ⊂ (IJK) ⇒ F ∈ (IJK)
Vậy : F = SC ∩ (IJK)

11.Cho tứ diện ABCD . Trên AC và AD lấy hai điểm M,N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD.
a. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD)
b. Tìm giao điểm của BC với (OMN)
c. Tìm giao điểm của BD với (OMN)



Giải
a. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD):
Ta có : O là điểm chung của (OMN) và (BCD)
Trong (ACD) , MN không song song CD
Gọi I = MN ∩ CD
⇒ I là điểm chung của (OMN) và (BCD)
Vậy : OI = (OMN) ∩ (BCD)
b. Tìm giao điểm của BC với (OMN):
Trong (BCD), gọi P = BC ∩ OI
Vậy : P = BC ∩ (OMN)
c. Tìm giao điểm của BD với (OMN):
Trong (BCD), gọi Q = BD ∩ OI
Vậy : Q = BD ∩ (OMN)

12.Cho hình chóp S.ABCD . Trong tam giác SBC lấy điểm M trong tam giác SCD lấy điểm N
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC)
b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN)

Giải
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC) :
• Chọn mp phụ (SMN) ⊃ MN
• Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMN)
Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SMN)
Trong (SBC), gọi M’ = SM ∩ BC
Trong (SCD), gọi N’ = SN ∩ CD

Trong (ABCD), gọi I = M'N' ∩ AC

I ∈ M'N' mà M'N' ⊂ (SMN) ⇒ I ∈ (SMN)

I ∈ AC mà AC ⊂ (SAC) ⇒ I ∈ (SAC)

⇒ I là điểm chung của (SMN) và (SAC)

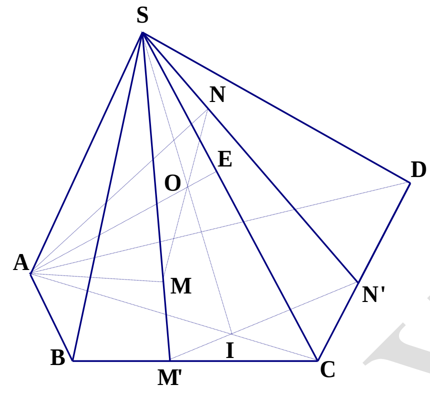
⇒ (SMN) ∩ (SAC) = SI

- Trong (SMN), gọi O = MN ∩ SI

O ∈ MN

O ∈ SI mà SI ⊂ (SAC) ⇒ O ∈ (SAC)

Vậy : O = MN ∩ (SAC)



b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN) :

- Chọn mp phụ (SAC) ⊃ SC
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN)

Ta có : (SAC) ∩ (AMN) = AO

- Trong (SAC), gọi E = AO ∩ SC

E ∈ SC

E ∈ AO mà AO ⊂ (AMN) ⇒ E ∈ (AMN)

Vậy : E = SC ∩ (AMN)

Dạng 3 : Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp :
- Chứng minh ba điểm đó cùng thuộc hai mp phân biệt
- Khi đó ba điểm thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mp

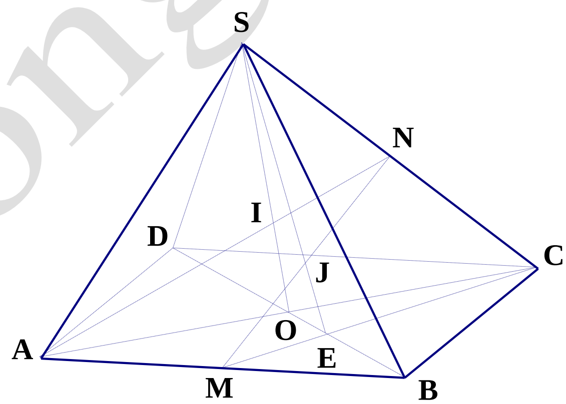
Bài tập :

1. Cho hình bình hành ABCD . S là điểm không thuộc (ABCD) ,M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC .

a. Xác định giao điểm I = AN ∩ (SBD)

b. Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

c. Chứng minh I , J , B thẳng hàng



Giải

a. Xác định giao điểm I = AN ∩ (SBD)

- Chọn mp phụ (SAC) ⊃ AN
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)

⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SO

- Trong (SAC), gọi I = AN ∩ SO

I ∈ AN

I ∈ SO mà SO ⊂ (SBD) ⇒ I ∈ (SBD)

Vậy: I = AN ∩ (SBD)

b. Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

- Chọn mp phụ (SMC) ⊃ MN
- Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD)

S là điểm chung của (SMC) và (SBD)

Trong (ABCD) , gọi E = MC ∩ BD

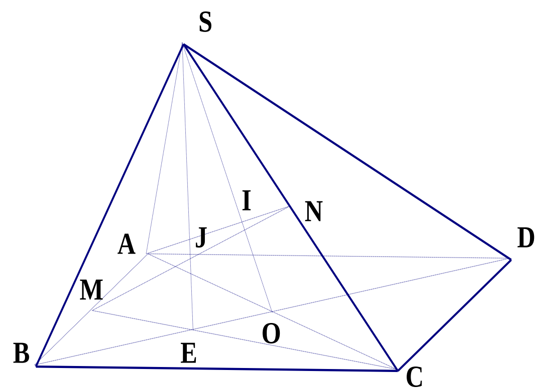
⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SE

- Trong (SMC), gọi J = MN ∩ SE

J∈ MN

J∈ SE mà SE ⊂ (SBD) ⇒ J ∈ (SBD)

Vậy J = MN ∩ (SBD)



c. Chứng minh I , J , B thẳng hàng

Ta có : B là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- I ∈ SO mà SO ⊂ (SBD) ⇒ I ∈ (SBD)
- I ∈ AN mà AN ⊂ (ANB) ⇒ I ∈ (ANB)

⇒ I là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- J ∈ SE mà SE ⊂ (SBD) ⇒ J∈ (SBD)
- J ∈ MN mà MN ⊂ (ANB) ⇒ J ∈ (ANB)

⇒ J là điểm chung của (ANB) và (SBD)

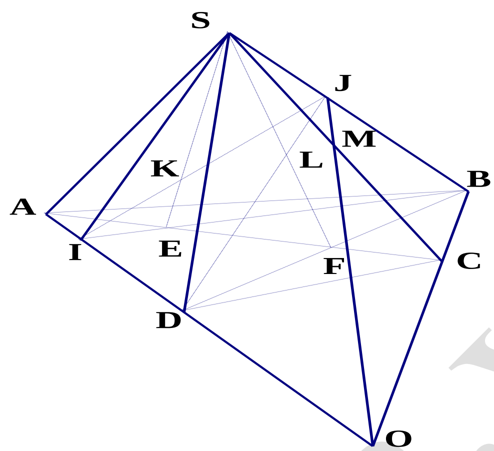
Vậy : B , I , J thẳng hàng

2. Cho tứ giác ABCD và S ∉ (ABCD). Gọi I , J là hai điểm trên AD và SB , AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M .

a. Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

b. Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

c. Chứng minh A ,K ,L ,M thẳng hàng



Giải

a. Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

- Chọn mp phụ (SIB) ⊃ IJ
- Tìm giao tuyến của (SIB) và (SAC)

S là điểm chung của (SIB) và (SAC)

Trong (ABCD) , gọi E = AC ∩ BI

⇒ (SIB) ∩ (SAC) = SE

- Trong (SIB), gọi K = IJ ∩ SE

K∈ IJ

K∈ SE mà SE ⊂ (SAC) ⇒ K ∈ (SAC)

Vậy: K = IJ ∩ (SAC)

b. Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

- Chọn mp phụ (SBD) ⊃ DJ
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

S là điểm chung của (SBD) và (SAC)

Trong (ABCD) , gọi F = AC ∩ BD

⇒ (SBD) ∩ (SAC) = SF

- Trong (SBD), gọi L = DJ ∩ SF

L∈ DJ

L∈ SF mà SF ⊂ (SAC) ⇒ L ∈ (SAC)

Vậy : L = DJ ∩ (SAC)

c. Chứng minh A ,K ,L ,M thẳng hàng

Ta có :A là điểm chung của (SAC) và (AJO)

- K ∈ IJ mà IJ ⊂ (AJO) ⇒ K∈ (AJO)
- K ∈ SE mà SE ⊂ (SAC) ⇒ K ∈ (SAC)

⇒ K là điểm chung của (SAC) và (AJO)

- L ∈ DJ mà DJ ⊂ (AJO) ⇒ L ∈ (AJO)
- L ∈ SF mà SF ⊂ (SAC) ⇒ L ∈ (SAC)

⇒ L là điểm chung của (SAC) và (AJO)

- M ∈ JO mà JO ⊂ (AJO) ⇒ M ∈ (AJO)
- M ∈ SC mà SC ⊂ (SAC) ⇒ M ∈ (SAC)

⇒ M là điểm chung của (SAC) và (AJO)

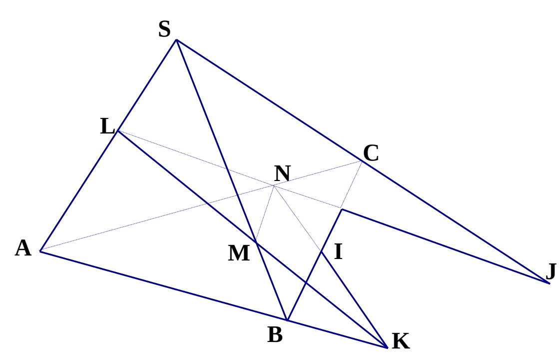
Vậy : A ,K ,L ,M thẳng hàng

3. Cho tứ diện SABC.Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC.

a. Tìm giao tuyến của mp (LMN) và (ABC)

b. Tìm giao điểm I = BC ∩ (LMN) và J = SC ∩ (LMN)

c. Chứng minh M , I , J thẳng hàng



Giải

a. *Tìm giao tuyến của mp (LMN) và (ABC)*

Ta có : N là điểm chung của (LMN) và (ABC)

Trong (SAB) , LM không song song với AB

Gọi K = AB ∩ LM

K ∈ LM mà LM ⊂ (LMN) ⇒ K ∈ (LMN)

K ∈ AB mà AB ⊂ (ABC) ⇒ K ∈ (ABC)

b. Tìm giao điểm I = BC ∩ (LMN)

- Chọn mp phụ (ABC) ⊃ BC
- Tìm giao tuyến của (ABC) và (LMN)

⇒ (ABC) ∩ (LMN) = NK

- Trong (ABC), gọi I = NK ∩ BC

I∈ BC

$I \in NK$ mà $NK \subset (LMN) \Rightarrow I \in (LMN)$

Vậy : $I = BC \cap (LMN)$

Tìm giao điểm $J = SC \cap (LMN)$

- Trong (SAC), LN không song song với SC
  gọi $J = LN \cap SC$

$J \in SC$

$J \in LN$ mà $LN \subset (LMN) \Rightarrow J \in (LMN)$

Vậy : $J = SC \cap (LMN)$

c. Chứng minh M , I , J thẳng hàng

Ta có : M , I , J là điểm chung của (LMN) và (SBC)

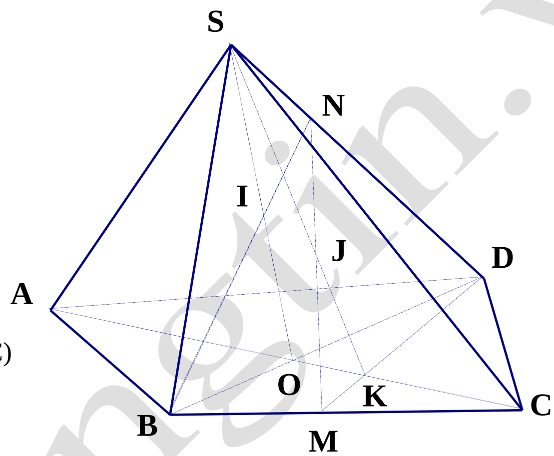
Vậy : M , I , J thẳng hàng

4. Cho tứ giác ABCD và $S \notin (ABCD)$. Gọi M , N là hai điểm trên BC và SD.

a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$

c. Chứng minh C , I , J thẳng hàng



Giải

a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$

- Chọn mp phụ $(SBD) \supset BN$
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)
  Trong (ABCD), gọi $O = AC \cap BD$
  $\Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SO$
- Trong (SBD), gọi $I = BN \cap SO$

$I \in BN$

$I \in SO$ mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$

Vậy : $I = BN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$:

- Chọn mp phụ $(SMD) \supset MN$
- Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAC)
  Trong (ABCD), gọi $K = AC \cap DM$
  $\Rightarrow (SMD) \cap (SAC) = SK$
- Trong (SMD), gọi $J = MN \cap SK$

$J \in MN$

$J \in SK$ mà $SK \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC)$

Vậy : $J = MN \cap (SAC)$

c. Chứng minh C , I , J thẳng hàng :

Ta có : C , I , J là điểm chung của (BCN) và (SAC)

Vậy : C , I , J thẳng hàng

Dạng 4 : Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) :

Chú ý : Mặt phẳng (α) có thể chỉ cắt một số mặt của hình chóp

Cách 1 : Xác định thiết diện bằng cách kéo dài các giao tuyến

Bài tập :

1. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O .
Gọi M, N , I là ba điểm lấy trên AD , CD , SO .
Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI)

Giải

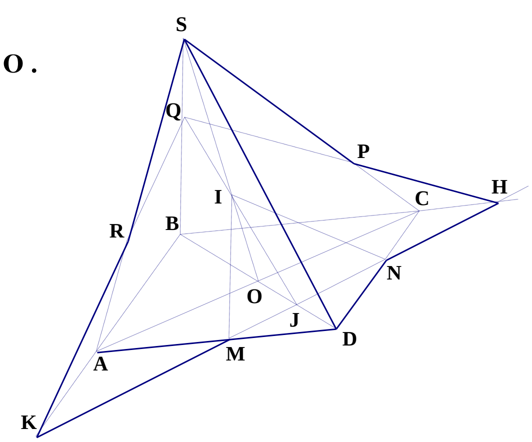
Trong (ABCD), gọi $J = BD \cap MN$
$K = MN \cap AB$
$H = MN \cap BC$

Trong (SBD), gọi $Q = IJ \cap SB$

Trong (SAB), gọi $R = KQ \cap SA$

Trong (SBC), gọi $P = QH \cap SC$

Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR



2. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm lấy trên AB , AD và SC .
Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

Giải

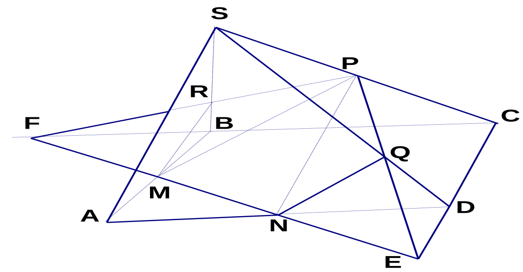
Trong (ABCD) , gọi E = MN ∩ DC

F = MN ∩ BC

Trong (SCD) , gọi Q = EP ∩ SD

Trong (SBC) , gọi R = FP ∩ SB

Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR



3. Cho tứ diện ABCD . Gọi H,K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M sao cho KM không song song với BD . Tìm thiết diện của tứ diện với mp (HKM).
Xét 2 .trường hợp :
a. M ở giữa C và D
b. M ở ngoài đoạn CD

Giải

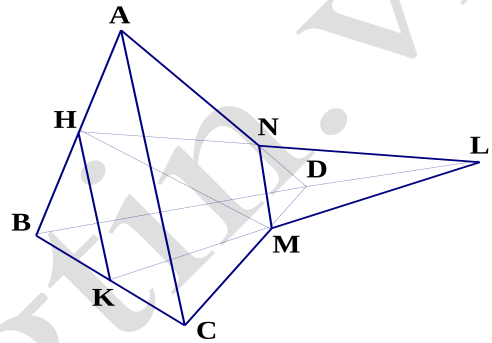
a. M ở giữa C và D :

Ta có : HK , KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD)

Trong (BCD), gọi L = KM ∩ BD

Trong (ABD), gọi N = AD ∩ HL

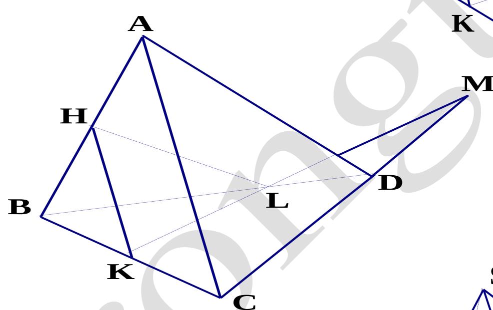
Vậy : thiết diện là tứ giác HKMN



b. M ở ngoài đoạn CD:

Trong (BCD), gọi L = KM ∩ BD

Vậy : thiết diện là tam giác HKL



4. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm lấy trên AD và DC .Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE)

Giải

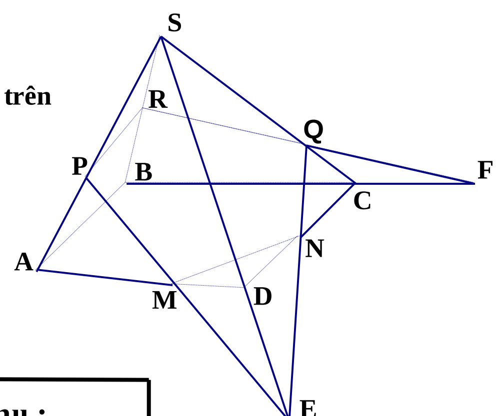
Trong (SCD), gọi Q = EN ∩ SC

Trong (SAD), gọi P = EM ∩ SA

Trong (ABCD), gọi F = MN ∩ BC

Trong (SBC), gọi R = FQ ∩ SB

Vậy : thiết diện là ngũ giác MNQRP



Cách 2 **:Xác định thiết diện bằng cách vẽ giao tuyến phụ :**

Bài tập :

5. Cho hình chóp S.ABCD .Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC . Giả sử AD và BC không song song .
a. Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC)
b. Xác định thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD

Giải

a. Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC) :

Trong (ABCD) , gọi I = AD ∩ BC

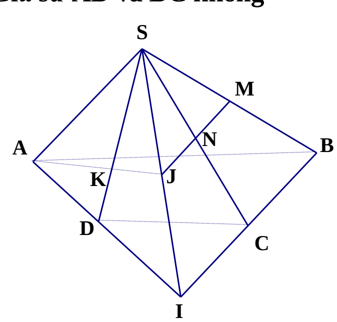
Vậy : SI = *(SAD) ∩ (SBC)*

b. Xác định thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD

Trong (SBC) , gọi J = MN ∩ SI

Trong (SAD) , gọi K = SD ∩ AJ

Vậy : thiết diện là tứ giác AMNK



6. Cho hình chóp S.ABCD.Trong tam giác SBC lấy một điểm M

S

trong tam giác SCD lấy một điểm N.
a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SAC)
b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN)
c. Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD

Giải

a. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SAC):

- Chọn mp phụ $(SMN) \supset MN$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMN)

Ta có : S là điểm chung của (SAC) và (SMN)
Trong (SBC), gọi $M' = SM \cap BC$
Trong (SCD), gọi $N' = SN \cap CD$
Trong (ABCD), gọi $I = M'N' \cap AC$
$I \in M'N'$ mà $M'N' \subset (SMN) \Rightarrow I \in (SMN)$
$I \in AC$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$
$\Rightarrow$ I là điểm chung của (SMN) và (SAC)
$\Rightarrow (SMN) \cap (SAC) = SI$

- Trong (SMN), gọi $O = MN \cap SI$

$O \in MN$
$O \in SI$ mà $SI \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC)$

Vậy : $O = MN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN) :

- Chọn mp phụ $(SAC) \supset SC$
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN)

Ta có : $(SAC) \cap (AMN) = AO$

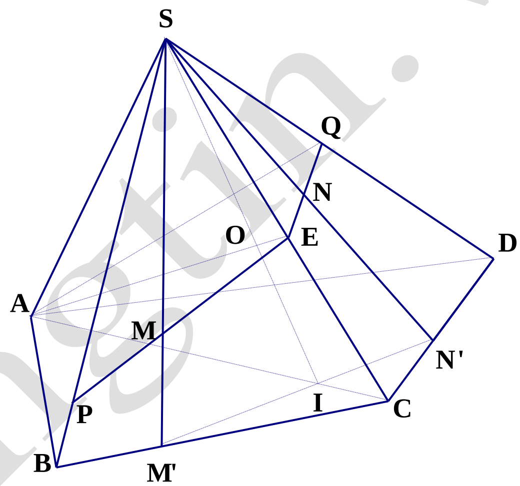
- Trong (SAC), gọi $E = AO \cap SC$

$E \in SC$
$E \in AO$ mà $AO \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$

Vậy : $E = SC \cap (AMN)$

c. Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) với hình chóp S.ABCD:

Trong (SBC), gọi $P = EM \cap SB$
Trong (SCD), gọi $Q = EN \cap SD$
Vậy : thiết diện là tứ giác APEQ



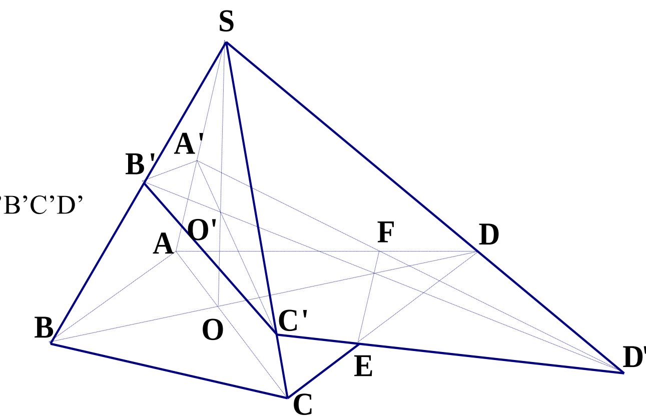
7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A', B' , C' là ba điểm lấy trên các cạnh SA, SB, SC . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A'B'C')

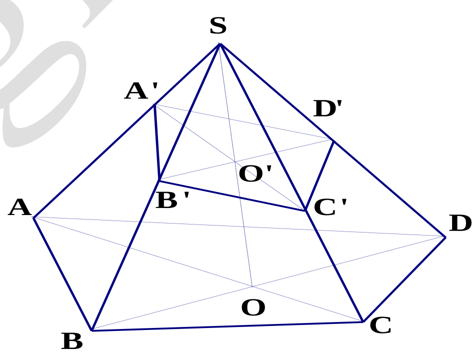
Giải

Trong (ABCD), gọi $O = AC \cap BD$
Trong (SAC), gọi $O' = A'C' \cap SO$
Trong (SBD), gọi $D' = B'O' \cap SD$
Có hai trường hợp :

- Nếu D' thuộc cạnh SD thì thiết diện là tứ giác A'B'C'D'
- Nếu D' thuộc không cạnh SD thì
  - Gọi $E = CD \cap C'D'$
    $F = AD \cap A'D'$

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác A'B'C'EF





Dạng 5 **: Chứng minh hai đường thẳng a và b song song :**

Sử dụng một trong các cách sau :

- Chứng minh a và b đồng phẳng và không có điểm chung
- Chứng minh a và b phân biệt và cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh a và b đồng phẳng và áp dụng các tính chất của hình học phẳng (cạnh đối của hình bình hành , định lý talet …)
- Sử dụng các định lý
- Chứng minh bằng phản chứng

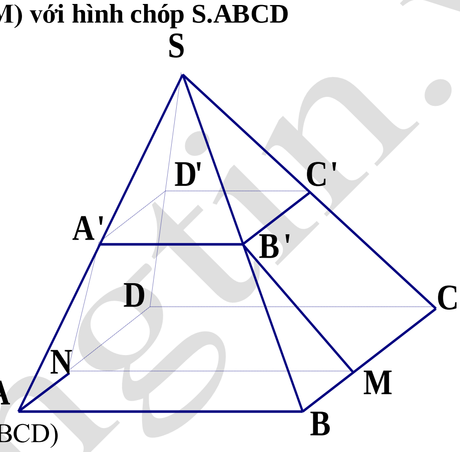
Bài tập :

1. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình bình hành .Gọi A’ ,B’ , C’ ,D’ lần lượt là trung điểm các cạnh SA , SB , SC , SD.

a. Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành

b. Gọi M là điểm bất kì trên BC . Tìm thiết diện của (A’B’M) với hình chóp S.ABCD

Giải



a. Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành :

Trong tam giác SAB, ta có : $A'B' \underset{=}{//} \frac{1}{2} AB$

Trong tam giác SCD, ta có : $C'D' \underset{=}{//} \frac{1}{2} CD$

Mặt khác $AB \underset{=}{//} CD$

$\Rightarrow A'B' \underset{=}{//} C'D'$

Vậy : A’B’C’D’ là hình bình hành

b. Tìm thiết diện của (A’B’M) với hình chóp S.ABCD:

Ta có : AB // A’B’ và M là điểm chung của (A’B’M) và (ABCD)

Do đó giao tuyến của (A’B’M) và (ABCD) là Mx song song AB và A’B’

Gọi $N = Mx \cap AD$

Vậy : Thiết diện là hình thang A’B’MN

2. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy AB và CD (AB >CD).

Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh SA , SB

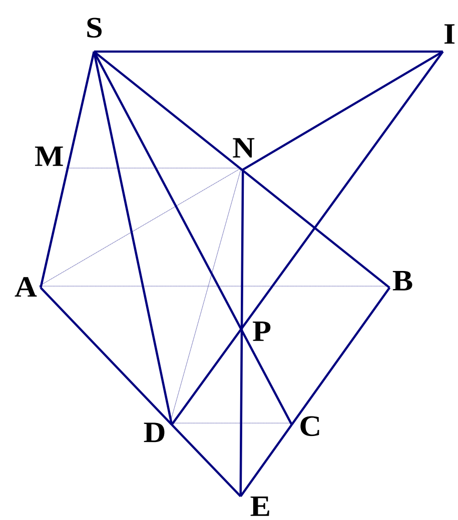
a. Chứng minh : MN// CD

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$

c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I .

Chứng minh : SI // AB // CD . Tứ giác SABI là hình gì ?

Giải



a. Chứng minh : MN// CD :

Trong tam giác SAB, ta có : MN // AB

Mà AB // CD (ABCD là hình thang)

Vậy : MN// CD

b. Tìm $P = SC \cap (ADN)$:

- Chọn mp phụ $(SBC) \supset SC$
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (ADN)

  Ta có : N là điểm chung của (SBC) và (ADN)

  Trong (ABCD), gọi $E = AD \cap AC$

  $\Rightarrow (SBC) \cap (ADN) = NE$

- Trong (SBC), gọi $P = SC \cap NE$

Vậy : $P = SC \cap (ADN)$

c. Chứng minh : SI // AB // CD . Tứ giác SABI là hình gì ?

Ta có : $\begin{cases} SI = (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow SI \,//\, AB \,//\, CD$ (theo định lí 2)

Xét Δ ASI , ta có : SI // MN (vì cùng song song AB)
M là trung điểm AB

$\Rightarrow$ SI $\overset{//}{=}$ 2MN

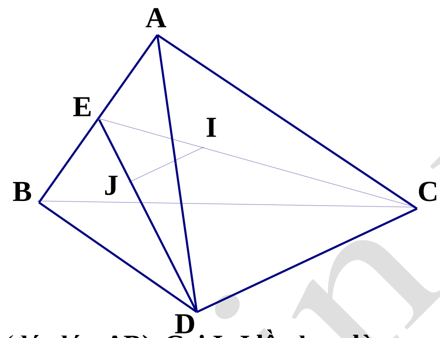
Mà AB $\overset{//}{=}$ 2.MN

Do đó : SI $\overset{//}{=}$ AB

Vậy : tứ giác SABI là hình bình hành

3. Cho tứ diện ABCD .Gọi I ,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD.
Chứng minh : IJ // CD

Giải



Gọi E là trung điểm AB

Ta có : $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases}$ $\Rightarrow$ IJ và CD đồng phẳng

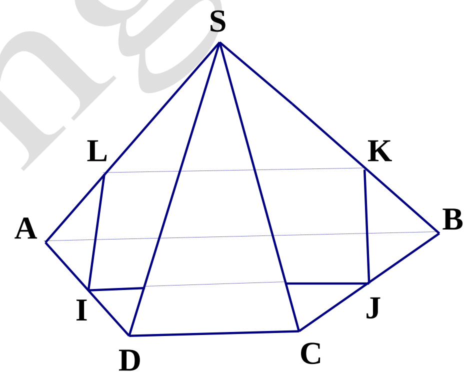
Do đó : $\dfrac{EI}{EC} = \dfrac{EJ}{ED} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

Vậy : IJ // CD

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (đáy lớn AB). Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC , K là điểm trên cạnh SB sao cho SN = $\dfrac{2}{3}$ SB .

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK)
b. Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp S.ABCD
Tìm điều kiện để thiết diện là hình bình hành

Giải



a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK):

Ta có : AB // IJ và K là điểm chung của (SAB) và (IJK)

Vậy : giao tuyến là đường thẳng Kx song song AB

b. Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp S.ABCD :

Gọi L = Kx $\cap$ SA

Thiết diện là hình thang IJKL

Do : IJ là đường trung bình của hình thang ABCD

$\Rightarrow$ IJ = $\dfrac{1}{2}$ (AB + CD)

Xét ΔSAB có : $\dfrac{LK}{AB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ LK = $\dfrac{2}{3}.AB$

IJKL là hình bình hành $\Leftrightarrow$ IJ = KL

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}$ (AB + CD) = $\dfrac{2}{3}.AB$

$\Leftrightarrow$ AB = 3.CD

Vậy : thiết diện IJKL là hình bình hành $\Leftrightarrow$ AB = 3.CD

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .Gọi M ,N ,P , Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC , SC , SD ,AD sao cho MN // BS , NP // CD , MQ // CD
a. Chứng minh : PQ // SA.
b. Gọi K = MN $\cap$ PQ
Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC.

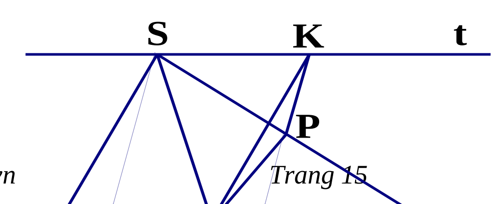
Giải

a. Chứng minh : PQ // SA.

Xét tam giác SCD :

Ta có : NP // CD

$\Rightarrow$ $\dfrac{NP}{DS} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)



Tương tự : MN // SB

$\Rightarrow \quad \dfrac{CN}{CS} = \dfrac{CM}{CB}$ (2)

Tương tự : MQ // CD

$\Rightarrow \quad \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA}$ (3)

Từ (1) , (2) và (3), suy ra $\dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA}$

Vậy : PQ // SA

b. Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC

Ta có : $\begin{cases} BC \,//\, AD \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến là đường thẳng St qua S cố định song song BC và AD

Mà K $\in$ (SBC) $\cap$ (SAD)

$\Rightarrow$ K $\in$ St (cố định)

Vậy : K $\in$ St cố định khi M di động trên cạnh BC

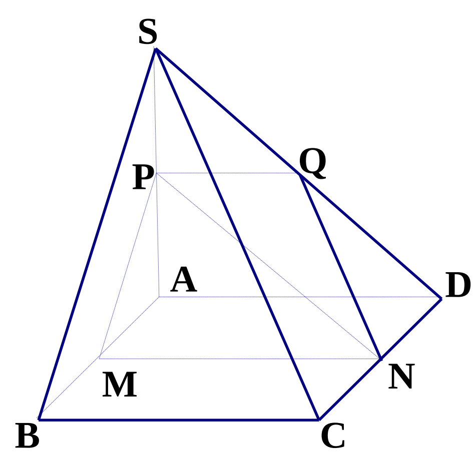
CHUYÊN ĐỀ: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG

Dạng 6 : Chứng minh đường thẳng a song song mặt phẳng (P) :

Phương pháp : Chứng minh $\begin{cases} d \not\subset \alpha \\ d \,//\, a \\ a \subset \alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d \,//\, \alpha$

Bài tập :

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .
Gọi M ,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD .
a. Chứng minh MN // (SBC) , MN // (SAD)
b. Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP)
c. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔSBC
Chứng minh G_1G_2 // (SAB)



Giải

a. Chứng minh MN // (SBC):

Ta có : $\begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ MN \,//\, BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad MN \,//\, (SBC)$

Tương tự : $\begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ MN \,//\, AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad MN \,//\, (SAD)$

b. Chứng minh SB // (MNP):

Ta có : $\begin{cases} SB \not\subset (MNP) \\ SB \,//\, MP \\ MP \subset (MNP) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad SB \,//\, (MNP)$

Chứng minh SC // (MNP):

Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD)

Ta có : P là điểm chung của (MNP) và (SAD)

MN // AD

Do đó giao tuyến là đường thẳng qua P song song MN cắt SD tại Q

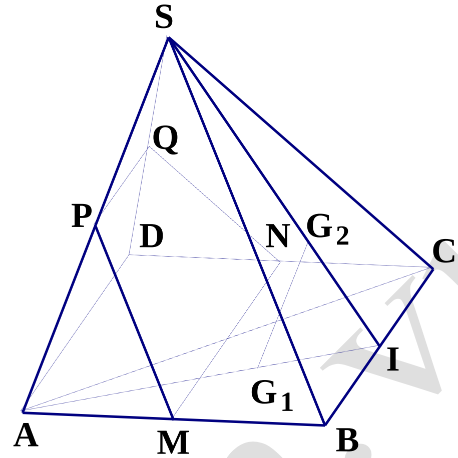
$\Rightarrow$ PQ = (MNP) $\cap$ (SAD)

Xét Δ SAD , Ta có : PQ // AD

P là trung điểm SA

$\Rightarrow$ Q là trung điểm SD

Xét Δ SCD , Ta có : QN // SC



Ta có : $\begin{cases} SC \not\subset (MNP) \\ SC // NQ \\ NQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SC //(MNP)$

c. *Chứng minh G_1G_2 // (SAB)* :

Xét Δ SAI , ta có : $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ G_1G_2 // SA

Do đó : $\begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 //(SAB)$

2. Cho hình chóp S.ABCD . M,N là hai điểm trên AB, CD . Mặt phẳng (α) qua MN // SA

a. Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC).

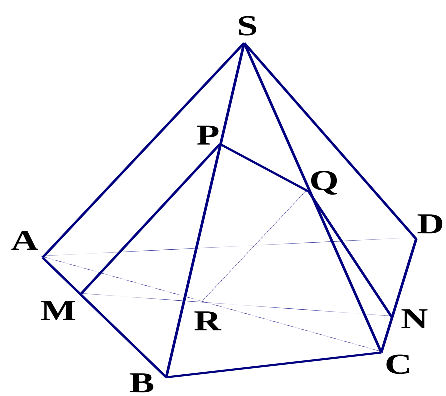
b. Xác định thiết diện của hình chóp với (α)

c. Tìm điếu kiện của MN để thiết diện là hình thang

Giải

a. *Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB):*

Ta có : $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ \alpha // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$



$\Rightarrow$ (α) $\cap$ (SAB) = MP với MP // SA

b. *Tìm các giao tuyến của (α) với (SAC):*

Gọi R = MN $\cap$ AC

Ta có : $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ \alpha // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (α) $\cap$ (SAC) = RQ với RQ // SA

b. *Xác định thiết diện của hình chóp với (α)*:

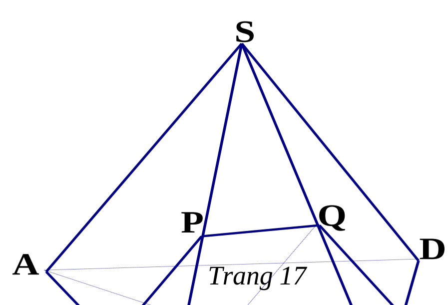
Thiết diện là tứ giác MPQN

c. *Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang:*

Ta có : MPQN là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} MP // QN & (1) \\ MN // PQ & (2) \end{array}\right.$

<u>Xét (1)</u> ,ta có $\begin{cases} SA // MP \\ MP // QN \end{cases} \Rightarrow SA // QN$

Do đó : $\begin{cases} SA // QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA //(SCD)$ (vô lí)



<u>Xét (2)</u> ,ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad MN \,//\, BC$

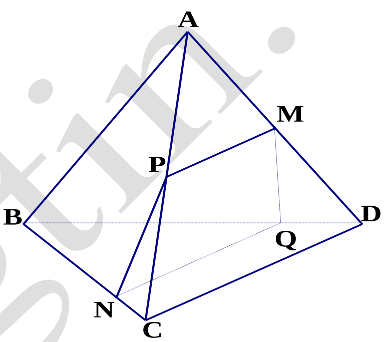
Ngược lại, nếu MN // BC thì $\begin{cases} PQ = \alpha \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad MN \,//\, PQ$

Vậy để thiết diện là hình thang thì MN // BC.

3. Cho tứ diện ABCD .Trên cạnh AD lấy trung điểm M , trên cạnh BC lấy trung điểm N bất kỳ . Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD .
a. Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD.
b. Xác định vị trí của N trên CD sao cho thiết diện là hình bình hành .

Giải

a. Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD.



Ta có : $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow \quad MP \,//\, CD \quad (1)$

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow \quad NQ \,//\, CD \quad (2)$

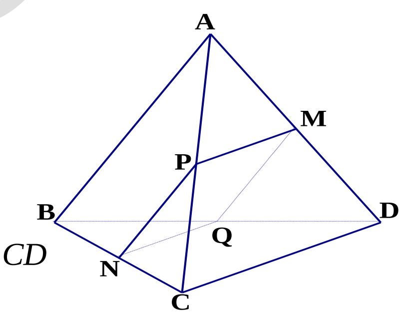
Từ (1) và (2), ta được : MP // NQ

Vậy: thiết diện là hình thang MPNQ

b. Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành .

Ta có : MP // NQ

MP = $\frac{1}{2}.CD$



MPNQ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} MP \,//\, NQ \\ MP = NQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MP \,//\, NQ \\ MP = NQ = \frac{1}{2} CD \end{cases}$

Do đó : N là trung điểm BC .

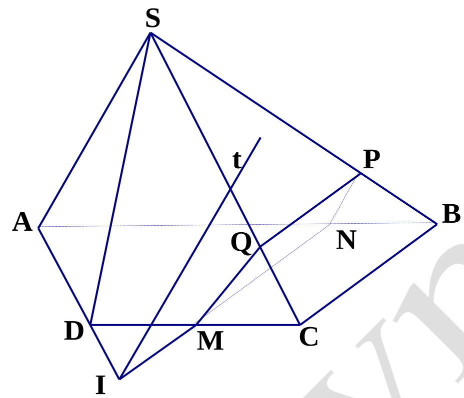
Vậy : N là trung điểm BC thì MPNQ là hình bình hành

4. Cho hình thang ABCD có đáy lớn AB và S là một điểm ở ngoài mặt phẳng của hình thang . Gọi M là một điểm của CD ; (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC .
a. Hãy tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD. Thiết diện là hình gì ?
b. Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

<u>Giải</u>

a. Hãy tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD:

Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // BC \\ BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \quad MN // BC \quad (1)$



Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \\ N \in (\alpha) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow \quad NP // SA$

$\begin{cases} (\alpha) // BC \\ BC \subset (SBC) \\ P \in (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad PQ // BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) , ta được : MN // PQ

Vậy : thiết diện là hình thang MNPQ.

b. Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

Trong (ABCD) , gọi I = AD ∩ BC

⇒ I là điểm chung của (α) và (SAD)

Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \\ I \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases}$

Vậy : giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SA.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .Gọi M là một điểm trên cạnh SC và (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a. Hãy nêu cách dựng các giao điểm E, F của mặt phẳng (α) lần lượt với các cạnh SB, SD.

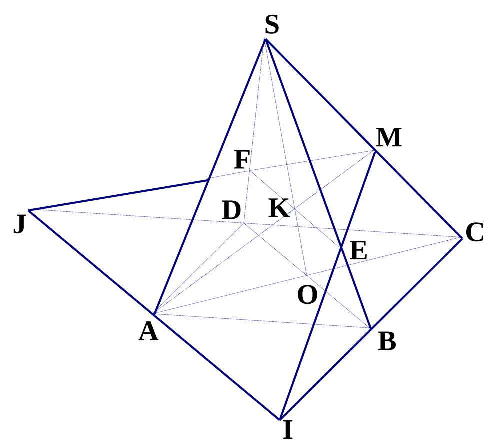
b. Gọi I là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh ba điểm I,J, A thẳng hàng .

Giải

a. Hãy nêu cách dựng các giao điểm E, F của mặt phẳng (α) lần lượt với các cạnh SB, SD.

Giả sử dựng được E, F thỏa bài toán

Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (SBD) \\ EF = (\alpha) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow \quad BD // EF$



Do các điểm E ,F ,A ,M cùng thuộc mặt phẳng (α)

Trong (α) , gọi K = EF ∩ AM

- K ∈ EF mà EF ⊂ (SBD) ⇒ K ∈ (SBD)
- K ∈ AM mà AM ⊂ (SAC) ⇒ K ∈ (SAC)

⇒ K ∈ (SAC) ∩ (SBD)

Do (SAC) ∩ (SBD) = SO

⇒ K ∈ SO

Cách dựng E, F :

Dựng giao điểm K của AM và SO , qua K dựng EF // BD

b.Chứng minh ba điểm I , J , A thẳng hàng :

Ta có : $\begin{cases} I \in ME \quad mà \quad ME \subset (\alpha) \quad \Rightarrow I \in (\alpha) \\ I \in BC \quad mà \quad BC \subset (ABCD) \quad \Rightarrow I \in (ABCD) \end{cases}$

⇒ I ∈ (α) ∩ (ABCD)

Tương tự , $\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ J \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$

⇒ I , J , A là điểm chung của (α) và (ABCD)

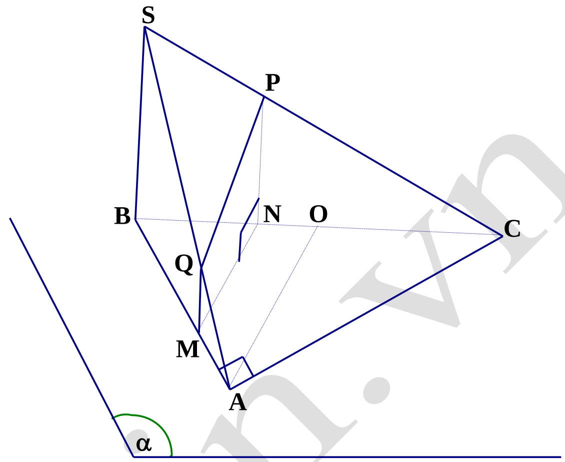
Vậy : I , J , A thẳng hàng .

6. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A , $\hat{B} = 60^0$, AB = a .Gọi O là trung điểm của BC . Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng (α) sao cho SB = a và SB ⊥ OA . Gọi M là mọt điểm trên cạnh AB , mặt phẳng (β) qua M song song với SB và OA , cắt BC ,SC , SA lần lượt tại N , P , Q . Đặt x = BM (0 < x < a) .

a. Chứng minh MNPQ là hình thang vuông

b. Tính diện tích của hình thang theo a và x .

Tính x để diện tích này lớn nhất .



<u>Giải</u>

a. Chứng minh MNPQ là hình thang vuông :

Ta có : $\begin{cases}(\beta)//OA \\ OA \subset (ABC) \\ MN = (\beta)\cap(ABC)\end{cases} \Rightarrow MN // OA \quad (1)$

$\begin{cases}(\beta)//SB \\ SB \subset (SAB) \\ MQ = (\beta)\cap(SAB)\end{cases} \Rightarrow MQ // SB \quad (2)$

$\begin{cases}(\beta)//SB \\ SB \subset (SBC) \\ NP = (\beta)\cap(SBC)\end{cases} \Rightarrow NP // SB \quad (3)$

Từ (2) và (3) ,suy ra MQ // NP // SB (4)

⇒ MNPQ là hình thang

Từ (1) và (4) , ta có : $\begin{cases}OA \perp SB \\ MN // OA \\ MQ // NP // SB\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}MN \perp MQ \\ MN \perp NP\end{cases}$

Vậy : MNPQ là hình thang vuông , đường cao MN.

b. Tính diện tích của hình thang theo a và x .

Ta có : $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP).MN$

<u>Tính MN</u> :

Xét tam giác ABC

Ta có : $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos B}$

$\Rightarrow BC = 2a \Rightarrow$ BO = a

Do $\begin{cases}\hat{B} = 60^0 \\ BA = BO\end{cases} \Rightarrow \Delta ABO$ đều

Có MN // AO ⇒ $\dfrac{MN}{AO} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BN}{BO}$

$\Rightarrow MN = MB = BN = x$

<u>Tính MQ</u> :

Xét tam giác SAB , ta có : MQ // SB

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = AM.\dfrac{SB}{AB} = (a-x).\dfrac{a}{a} = a - x$

<u>Tính NP</u> :

Xét tam giác SBC , ta có : NP // SB

$\Rightarrow \dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow NP = CN.\dfrac{SB}{CB} = (2a-x).\dfrac{a}{2a} = \dfrac{2a-x}{2}$

Do đó : $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4} = \dfrac{1}{12}.3x.(4a-3x)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương 3x và 4a – 3x

$3x.(4a-3x) \le \left(\dfrac{3x+4a-3x}{2}\right)^2$

$\le 4a^2$

$\Rightarrow \quad S_{MNPQ} \le \dfrac{1}{12}.4a^2 = \dfrac{a^2}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi 3x = 4a – 3x ⇔ x = $\dfrac{2a}{3}$

Vậy : x = $\dfrac{2a}{3}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

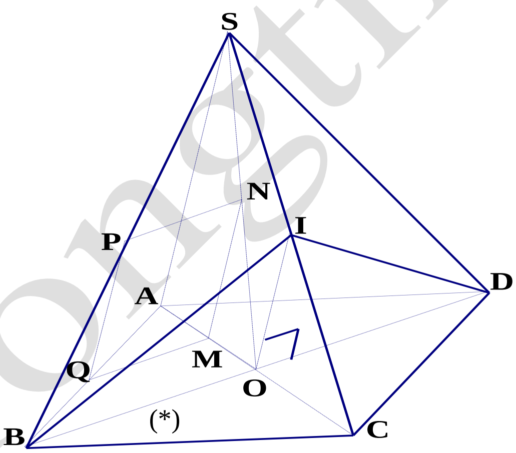
7. Cho hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho SB = SD. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với AM = x . mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO , SB , AB tại N, P , Q .

a. Tứ giác MNPQ là hình gì ?

b. Cho SA = a . Tính diện tích MNPQ theo a và x . Tính x để diện tích lớn nhất

Giải

a. Tứ giác MNPQ là hình gì ?:



Ta có : SB = SD ⇒Δ SBC = Δ SDC (c-c-c)

Gọi I là trung điểm SC

Xét Δ IBC và Δ IDC

Ta có : IC cạnh chung

BC = CD

$\widehat{DCI} = \widehat{BCI}$

⇒ Δ IBC = Δ IDC

⇒ IB = ID

⇒ Δ IBD cân tại I

⇒ IO ⊥ BD

Mà OI // SA ⇒ SA ⊥ BD

Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (ABO) \\ (\alpha) \cap (ABO) = MQ \end{cases} \Rightarrow \quad MQ // BD \quad (1)$

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (SBO) \\ (\alpha) \cap (SBO) = NP \end{cases} \Rightarrow \quad NP // BD \quad (2)$

Từ (1) và (2) , suy ra $MQ // NP // BD$ (3)

Mặt khác : $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAO) \\ (\alpha) \cap (SAO) = MN \end{cases} \Rightarrow \quad MN // SA \quad (4)$

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \\ (\alpha) \cap (SAB) = PQ \end{cases} \Rightarrow \quad PQ // SA \quad (5)$

Từ (4) và (5) , suy ra $MN // PQ // SA$ (6)

Từ (3) , (6) và (*), suy ra MNPQ là hình chữ nhật

Vậy : MNPQ là hình chữ nhật

b. Tính diện tích MNPQ theo a và x:

Ta có : $S_{MNPQ} = MQ.MN$

Tính MQ :

Xét tam giác AQM :

Ta có : $\begin{cases} \hat{A} = 45^0 \\ \hat{Q} = 45^0 \\ \hat{M} = 90^0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ΔAQM cân tại M $\Rightarrow$ MQ = AM = x

Tính MQ :

Xét tam giác SAO :

Ta có : MN // SA $\Rightarrow \dfrac{MN}{AS} = \dfrac{OM}{OA}$ $\Rightarrow$ $MN = AS.\dfrac{OM}{OA} = a.\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\dfrac{a.\sqrt{2}}{2}} = a - x.\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $S_{MNPQ} = MQ.MN = x.(a - x.\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x.\sqrt{2}(a - x.\sqrt{2})$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $x.\sqrt{2}$ và $a - x.\sqrt{2}$

$$x.\sqrt{2}(a - x.\sqrt{2}) \le \left(\frac{x.\sqrt{2} + a - x.\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\le \frac{a^2}{4}$$

$\Rightarrow$ $S_{MNPQ} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4.\sqrt{2}}$ $\Rightarrow S_{MNPQ_{mã}} = \dfrac{a^2}{4.\sqrt{2}}$

Đẳng thức xảy ra khi $x.\sqrt{2} = a - x.\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{a}{2.\sqrt{2}} = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm AO

Vậy : $x = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

8. Cho tứ diện ABCD có AB = a , CD = b . Gọi I , J lần lượt là trung điểm AB và CD . Giả sử AB ⊥ CD , mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a. Tìm giao tuyến của (α) với (ICD) và (JAB) .

b. Xác định thiết diện của (ABCD) với mặt phẳng (α)

Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật .

c. Tính diện tích thiết diện của huình chữ nhật biết IM = $\dfrac{1}{3}$ IJ .

Giải

a. Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ICD):

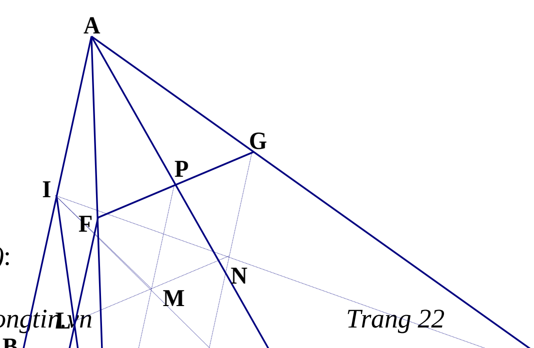
Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến là đt qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến là đt qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q

b. Xác định thiết diện của (ABCD) với mặt phẳng (α):



Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ EF // AB (1)

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ HG // AB (2)

Từ (1) và (2) , suy ra EF // HG // AB (3)

Ta có : $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ FG // CD (4)

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ EH // CD (5)

Từ (4) và (5) , suy ra FG // EH // CD (6)

Từ (3) và (6) , suy ra EFGH là hình bình hành

Mà AB ⊥ CD (*)

Từ (3) , (6) và (*), suy ra EFGH là hình chữ nhật

c. Tính diện tích thiết diện của huình chữ nhật biết IM = $\frac{1}{3}$ *IJ :*

Ta có : $S_{EFGH} = EF.FG = PQ.LN$

Tính LN :

Xét tam giác ICD :

Ta có : LN // CD $\Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$ (7)

Xét tam giác IJD :

Ta có : MN // JD $\Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$ (8)

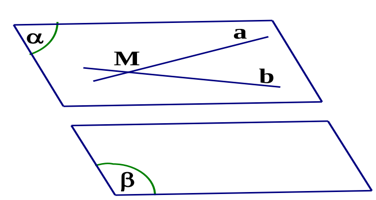
Từ (7) và (8), suy ra $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{CD}{3} = \frac{b}{3}$

Tương tự : $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}.AB = \frac{2}{3}.a$

Vậy : $S_{EFGH} = \frac{2ab}{9}$

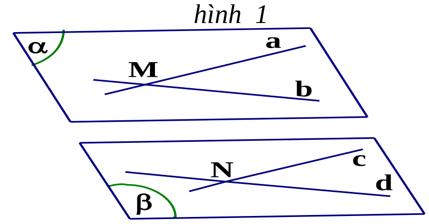
CHUYÊN ĐỀ: HAI MẶT THẲNG SONG SONG

Dạng 7 : Chứng minh (α) // (β) : Sử dụng các cách sau :



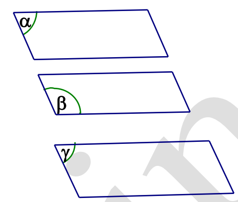
– $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a // (\beta), b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha) // (\beta)$

hình 1



– $\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ c \cap d = N \\ a // c, b // d \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha) // (\beta)$

hình 2



– $\begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \end{cases} \Rightarrow \quad (\alpha) // (\beta)$

hình 3

Bài tập :

1.Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA ,SD

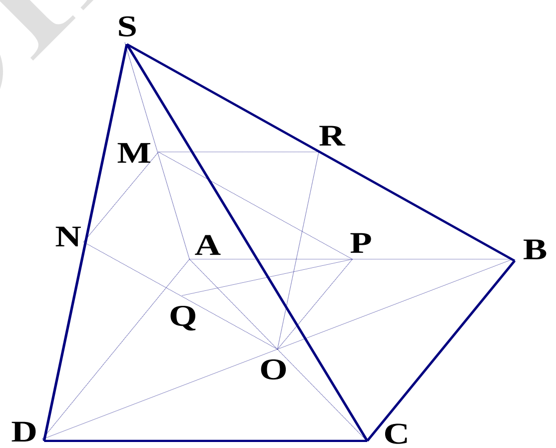
a. Chứng minh rằng : (OMN) // (SBC)

b. Gọi P, Q , R lần lượt là trung điểm của AB ,ON, SB.

Chứng minh : PQ // (SBC), (MOR) // (SCD)

Giải

a. Chứng minh rằng : (OMN) // (SBC):



Xét tam giác SAC và SDB :

Ta có : $\begin{cases} OM // SC \\ ON // SB \end{cases} \Rightarrow \quad (OMN) // (SBC)$

b. Chứng minh : PQ // (SBC)

Ta có : $\begin{cases} OP // AD \\ AD // MN \end{cases} \Rightarrow \quad OP // MN$

$\Rightarrow$ M, N, P, O đồng phẳng

$\Rightarrow$ PQ $\subset$ (MNO)

Mà $\begin{cases} PQ \subset (MNO) \\ (MNO) // (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad PQ // (SBC)$

Vậy : PQ // (SBC)

Chứng minh : PQ // (SBC), (MOR) // (SCD) :

Ta có : $\begin{cases} MR // AB \\ AB // DC \end{cases} \Rightarrow \quad MR // DC$ (1)

Xét tam giác SDB : ta có $OR // SD$ (2)

Từ (1) và (2) , ta được $\begin{cases} MR // DC \text{ và } OR // SD \\ MR \subset (MOR) \text{ và } OR \subset (MOR) \\ DC \subset (SCD) \text{ và } SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \quad (MOR) // (SCD)$

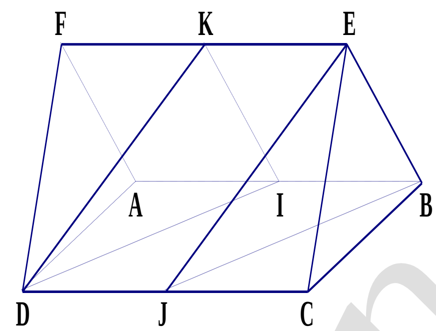
2. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng . I , J , K lần lượt là trung điểm các cạnh AB , CD, EF. Chứng minh :

a. (ADF) // (BCE) **b. (DIK) // (JBE)**

Giải

a. (ADF)//(BCE):

Ta có : $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ AD \not\subset (BCE) \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \,//(BCE)$ (1)



Tương tự : $\begin{cases} AF \,//\, BE \\ AF \not\subset (BCE) \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \,//(BCE)$ (2)

Từ (1) và (2) , ta được :

$$\begin{cases} AD \,//(BCE) \\ AF \,//(BCE) \\ AD \subset (ADF) \ \text{và} \ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF)//(BCE)$$

Vậy : $(ADF)//(BCE)$

b. (DIK)//(JBE) :

Ta có : $\begin{cases} DI \,//\, JB \\ IK \,//\, BE \end{cases} \Rightarrow (DIK)//(JBE)$

Vậy : *(DIK)//(JBE)*

3. Cho các hình bình hành ABCD , ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau .Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M,N sao cho MC = 2AM , NF = 2BN . Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1 , N_1 .

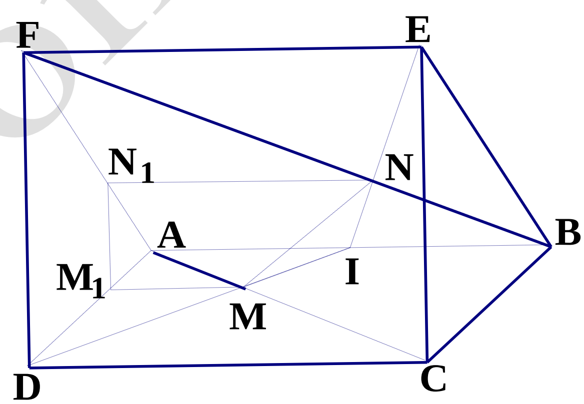
Chứng minh rằng :

a. $MN \,//\, DE$

b. $M_1N_1 \,//(DEF)$

c. $(MNM_1N_1)//(DEF)$

<u>Giải</u>



a. $MN \,//\, DE$:

Giả sử EN cắt AB tại I

Xét Δ NIB ~ Δ NEF

Ta có : $\dfrac{IB}{EF} = \dfrac{NB}{NF} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ I là trung điểm AB và $\dfrac{IN}{NE} = \dfrac{1}{2}$ (1)

Tương tự : Xét Δ MAI ~ Δ MCD

Ta có : $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MI}{MD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ I là trung điểm AB và $\dfrac{IM}{MD} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra $\dfrac{IM}{MD} = \dfrac{IN}{NE} \Rightarrow MN \,//\, DE$

Vậy : $MN \,//\, DE$

b. $M_1N_1 \,//(DEF)$:

Ta có : $NN_1 \,//\, AI \Rightarrow \dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{IN}{NE} = \dfrac{1}{2}$ (3)

Tương tự : $MM_1 \,//\, AI \Rightarrow \dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{IM}{MD} = \dfrac{1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) , suy ra $\dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad M_1N_1 \,//\, DF$

Ta được : $\begin{cases} M_1N_1 \,//\, DF \\ DF \subset (DEF) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_1N_1 \,//(DEF)$

Vậy : $M_1N_1 \,//(DEF)$

c. $(MNM_1N_1)\,//(DEF)$:

Ta có : $\begin{cases} MN \,//\, DE \\ M_1N_1 \,//\, DF \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (MNN_1M_1)\,//(DEF)$

Vậy : $(MNM_1N_1)\,//(DEF)$

4. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên AB lấy một điểm M với AM = x . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB , SC , và CD lần lượt tại N, P, Q

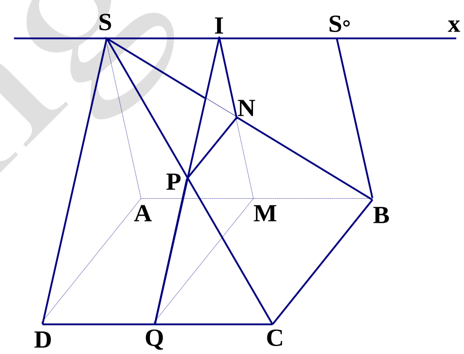
a. Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp . Thiết diện là hình gì ?

b. Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

c. Cho $\widehat{SAD}$ = 1v và SA = a. Tính diện tích của thiết diện theo a và x .Tính x để diện tích = $\dfrac{3a^2}{8}$

Giải

a. Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp:



Ta có : $(\alpha)\,//(SAD) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\alpha)\,//\, SD \\ (\alpha)\,//\, SA \\ (\alpha)\,//\, AD \end{cases}$

• Với $(\alpha)\,//\, SD$

Có $\begin{cases} (\alpha)\,//\, SD \\ SD \subset (SAD) \\ (\alpha) \cap (SAD) = PQ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad PQ \,//\, SD$

• Với $(\alpha)\,//\, SA$

Có $\begin{cases} (\alpha)\,//\, SA \\ SA \subset (SAB) \\ (\alpha) \cap (SAB) = MN \end{cases} \quad \Rightarrow \quad MN \,//\, SA$

• Với $(\alpha)\,//\, AD$

Có $\begin{cases} (\alpha)\,//\, AD \\ AD \subset (ABCD) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MQ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad MQ \,//\, AD \quad (1)$

• Vì $\begin{cases} BC \,//\, MQ \\ BC \not\subset (\alpha) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\alpha)\,//\, BC$

Có $\begin{cases} (\alpha)\,//\, BC \\ BC \subset (SBC) \\ (\alpha) \cap (SBC) = PN \end{cases} \quad \Rightarrow \quad PN \,//\, BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $MQ \,//\, PN \quad \Rightarrow \quad MNPQ$ là hình thang

Vậy : $MNPQ$ là hình thang

b. Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.:

Ta có : $\begin{cases} AB // DC \\ AB \subset (SAB), DC \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \quad Sx // AB // CD$

Mà $\begin{cases} I \in PQ \quad mà \quad PQ \subset (SCD) \\ I \in MN \quad mà \quad MN \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow \quad I \in (SAB) \cap (SDC) \quad \Rightarrow \quad I \in Sx$

Giới hạn quĩ tích : Khi $M \equiv A \Rightarrow I \equiv S$

$M \equiv B \Rightarrow I \equiv S_0$

c. Tính diện tích của thiếtdiện theo a và x :

Ta có : $S_{MNPQ} = S_{IMQ} - S_{INP} = S_{SAD} - S_{INP}$

Tính : S_{SAD}

Ta có: Δ SAD vuông cân tại A

Do đó : $S_{SAD} = \dfrac{1}{2}.a^2$

Tính : S_{INP}

Xét tam giác SBC , tam giác SBS $_0$ và tam giác SAB

Ta có : $NI // S_0B \Rightarrow \dfrac{NI}{S_0B} = \dfrac{SN}{SB}$ (1)

$PN // BC \Rightarrow \dfrac{PN}{BC} = \dfrac{SN}{SB}$ (2)

$MN // SA \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{SN}{SB}$ (3)

Từ (1) , (2) và (3) , ta được $\dfrac{NI}{S_0B} = \dfrac{PN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow NI = PN = AM = x$

$\Rightarrow$ Δ INP vuông cân tại N

Do đó : $S_{INP} = \dfrac{1}{2}.x^2$

$\Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}.a^2 - \dfrac{1}{2}.x^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)$

Để $S_{MNPQ} = \dfrac{3.a^2}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2) = \dfrac{3.a^2}{8}$

$\Leftrightarrow x^2 = a^2 - \dfrac{3.a^2}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{4}$

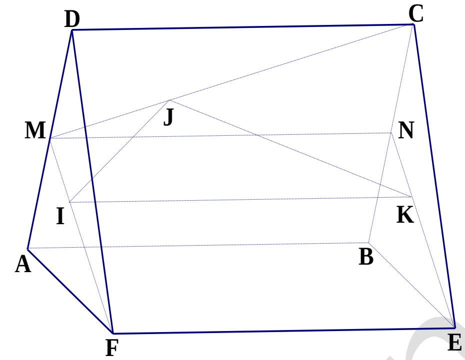
$\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

5. **Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt . Gọi M , N thứ tự là trung điểm của AB , BC và I , J , K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF , ADC , BCE . Chứng minh (IJK) // (CDFE)**

Giải

Xét tam giác MFC :

Ta có : $\dfrac{MI}{MF} = \dfrac{MJ}{MC} = \dfrac{1}{3}$



$\Rightarrow \quad IJ \,//\, FC$ (1)

Xét hình bình hành MNEF :

Ta có : $\dfrac{MI}{MF} = \dfrac{NK}{NE} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad IK \,//\, FE$ (2)

Từ (1) và (2) , ta được $\begin{cases} IJ \,//\, FC \\ IK \,//\, FE \end{cases} \Rightarrow \quad (IJK) // (CEF)$

Vậy : $(IJK) // (CEF)$

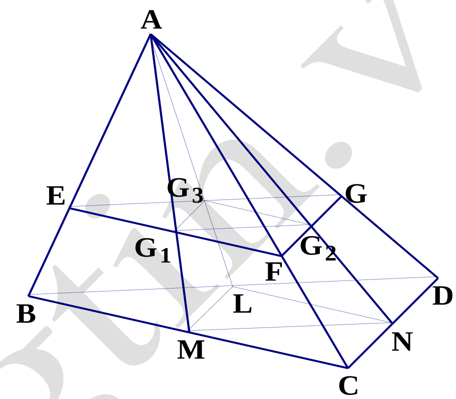
6. Cho tứ diện ABCD . Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC , ACD , ADB

a. Chứng minh : $(G_1G_2G_3) // (BCD)$

b. Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$

Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD là S

<u>Giải</u>



a. Chứng minh : $(G_1G_2G_3) // (BCD)$

Gọi M , N , L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CD và BD

Ta có : $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{AG_3}{AL} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad G_1G_2 \,//\, MN \quad ; G_2G_3 \,//\, NL \quad ; G_3G_1 \,//\, LM$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_1G_2 \,//\, MN \\ G_2G_3 \,//\, NL \\ MN \subset (BCD) \;,\; NL \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (G_1G_2G_3) // (BCD)$$

Vậy : $(G_1G_2G_3) // (BCD)$

b. Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$:

Ta có : $\begin{cases} BC // (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (BCD) \\ G_1 \in (G_1G_2G_3) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow$ gt qua $G_1 \,//\, BC$ cắt AB và AC tại E và F

Tương tự : $(G_1G_2G_3)$ cắt (ACD) theo giao tuyến FG // CD

$(G_1G_2G_3)$ cắt (ABD) theo giao tuyến GE // BD

Xét tam giác AMC và tam giác ABC

Ta có : $G_1F \,//\, MC \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{2}{3}$ (1)

$EF \,//\, BC \quad \Rightarrow \quad \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2), ta được $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad EF = \dfrac{2}{3}.BC$

Tương tự : $FG = \dfrac{2}{3}.CD$

$GE = \dfrac{2}{3}.BD$

$$\Rightarrow \quad EF + FG + GE = \frac{2}{3}.BC + \frac{2}{3}.CD + \frac{2}{3}.GE = \frac{2}{3}(BC + CD + GE)$$

Diện tích thiết diện :

$$S_{EFG} = \frac{1}{4}.\sqrt{(EF+FG+GE).(EF+FG-GE).(EF+GE-FG).(FG+GE-EF)}.$$

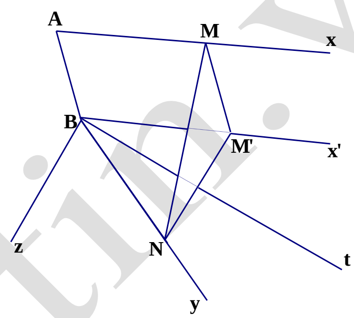
$$= \frac{1}{4}.\frac{4}{9}.\sqrt{(BC+CD+DB).(BC+CD-DB).(BC+DB-CD).(CD+DB-BC)}$$

$$= \frac{4}{9}.S_{BCD}$$

Vậy : $S_{EFG} = \frac{4}{9}.S_{BCD}$

7. Cho hai nữa đường thẳng chéo nhau Ax, By .Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho AM = BN .Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định

Giải



Kẻ Bx'// Ax . Trên Bx' lấy điểm M' sao cho AM = BM'

T a có : $\begin{cases} AM \,//\, BM' \\ AM = BM' \end{cases}$ $\Rightarrow$ ABM'M là hình bình hành

$\Rightarrow$ MM'//AB (1)

$\Rightarrow$ ΔBM'N cân tại B

Kẻ Bt là phân giác góc x'By $\Rightarrow$ M'N ⊥ Bt (2)

Trong (x'By) , kẻ Bz ⊥ Bt (3)

Từ (2) và (3) , ta được Bz // M'N (4)

Từ (1) và (4) , $\begin{cases} MM' \,//\, AB \\ M'N \,//\, Bz \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(MNM') // (ABz)$

$\Rightarrow$ MN // (ABz)

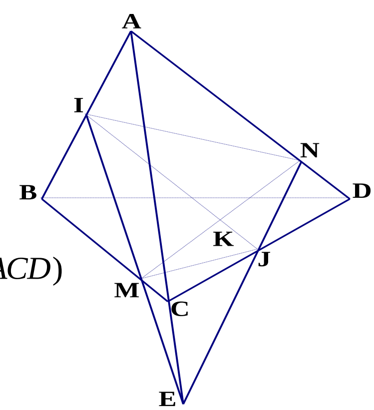
Vậy : MN // (ABz) cố định

8. Cho tứ diện ABCD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một mặt phẳng qua IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M

a. Cho trước điểm M, hãy trình bày cách dựng điểm N. Xét trường hợp đặc biệt khi M là trung điểm của BC

b. Gọi K là giao của MN và IJ .Chứng minh rằng : KM = KN

Giải



a. Hãy trình bày cách dựng điểm N :

Điểm N phải nằm trên giao tuyến của (MIJ) và (ACD) , giao tuyến này qua J

Ta có : $J \in (MIJ) \cap (ACD)$

Gọi $E = MI \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} E \in MI \quad mà \quad MI \in (MIJ) \\ E \in AC \quad mà \quad AC \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MIJ) \cap (ACD)$

$\Rightarrow EJ = (MIJ) \cap (ACD)$

Gọi $N = EJ \cap AD$

Trường hợp M là trung điểm BC:

Nếu M là trung điểm BC $\Rightarrow$ $IM \,//\, AC$

$\Rightarrow$ (IMJ) // AC

$\Rightarrow$ (IMJ) cắt (ACD) theo giao tuyến JN // AC

b. Chứng minh rằng : KM = KN.

Do I , J lần lượt là trung điểm AB ,CD

$\Rightarrow$ có thể dựng ba mặt phẳng chứa ba đường thẳng lần lượt song song nhau

Áp dụng định lí Talet trong không gian

Ta được : $\frac{MK}{KN} = \frac{BI}{IA} = 1 \Rightarrow MK = KN$

Vậy : $MK = KN$

CHUYÊN ĐỀ: HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH HỘP

Bài tập :

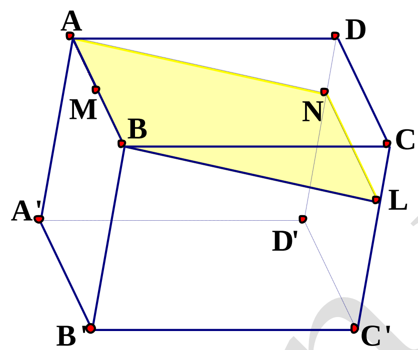
1.Cho hình hộp ABCD. A’B’C’D’ và các điểm M , N lần lượt thuộc các cạnh AB , DD’ (M, N không trùng với các đầu mút A,B ,D ,D’ của các cạnh). Hãy xác định thiết diện của hình hộp bị cắt bởi :

a. Mặt phẳng (MNB) & Các thiết diện là hình g ì ?

b. Mặt phẳng (MNC) & Các thiết diện là hình g ì ?

c. Mặt phẳng (MNC’)

<u>Giải</u>



a. *Xác định thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNB) :*

Ta có : (MNB) ∩ (AA’B’B)= MB=BA

(MNB) ∩ (AA’D’D) = AN

(MNB) ∩ (DD’C’C) = NL

(trong đó L = x ∩ CC’, L ∈ x // DC , x đi qua N)

(MNB) ∩ (BB’C’C) = LB

⟹ thiết diện là tứ giác ABLN

m ặt kh ác NL //= DC

DC //= AB

⟹ NL //= AB

nên thiết diện ABLN l à h ình b ình h ành.

b. *Xác định thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNC) :*

T ư ơng T ự

Ta có : (MNC) ∩ (BB’C’C)= BC

(MNC) ∩ (CC’D’D) = CN

(MNC) ∩ (DD’A’A) = NI

(trong đó I = y ∩ AA’, I ∈ y // AD , y đi qua N)

(MNC) ∩ (BB’A’A) = IB

⟹ thiết diện là tứ giác BCNI

m ặt kh ác NI //= AD

AD //= BC

⟹ NI //= BC

nên thiết diện BCNI l à h ình b ình h ành.

c. *Xác định thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNC’) :*

Gọi C’N ∩ DC = K

Nối KM ∩ AD = P

KM ∩ BC = R

Kẻ RC’ Cắt BB’ tại Q

Ta có : (MNC’) ∩ (DD’C’C) = C’N

(MNC’) ∩ (DD’A’A) = NP

(MNC’) ∩ (ABCD) = PM

(MNC’) ∩ (AA’B’B) = MQ

(MNC’) ∩ (BB’C’C) = QC’

(MNC’) ∩ (A’D’C’B’) = C’

⟹ thiết diện là tứ giác NPMQC’