

## CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

**Nếu đặt**  $t = \sin^2 x$  hoặc  $t = |\sin x|$  thì điều kiện:  $0 \leq t \leq 1$ .

### MỘT SỐ VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Giải phương trình:  $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$  (1)

*Giải*

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } 2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -3 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

**Ví dụ 2.** Giải phương trình:  $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$  (2)

*Giải*

$$(2) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 4 \frac{1 + \cos x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } 2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 3 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{Khi } t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (2) là  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ ,  $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**Ví dụ 3.** Giải phương trình:  $\frac{1}{\cos^2 x} - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$  (3)

**Giải**

Điều kiện:  $\cos x \neq 0$  (\*)

$$(3) \Leftrightarrow 1 + \tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

Đặt  $t = \tan x$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } t^2 - (1 + \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$+ \text{ Với } t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

So sánh với điều kiện (\*) suy ra nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Ví dụ 4.** Giải phương trình:  $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

**Giải**

$$\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \quad (4)$$

Đặt  $t = \cos x, t \in [-1, 1]$ .

$$(4) \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

**Ví dụ 5.** Giải phương trình:  $\sqrt{3} \cot^2 x - 4\cot x + \sqrt{3} = 0$

**Giải**

Đặt  $t = \cot x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = \sqrt{3} \\ \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

## BÀI TẬP

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a)  $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\text{b) } \cos 2x + \cos x + 1 = 0$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$\text{c) } 4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$\text{d) } \cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$\text{e) } 6\sin^2 3x + \cos 12x = 14$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$\text{f) } 8\sin^2 x - \cos x = 5$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

1)  $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2)  $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3)  $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

4)  $\cot^2 x + (1 - \sqrt{3})\cot x - \sqrt{3} = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

5)  $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$

.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....

$$6) 4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$7) \tan^2 x + \cot^2 x = 2$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$8) \cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

$$1) 4\sin^2 3x + 2(\sqrt{3} + 1)\cos 3x - \sqrt{3} = 4$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$2) \cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$$

$$3) 4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$$

$$4) \frac{1}{\cos^2 x} - (3 + \sqrt{3})\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$$

$$5) \frac{3}{\cos x} + \tan^2 x = 9$$

$$6) 9 - 13\cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$$

$$7) \frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$$

$$8) \frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$$

$$9) \cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$10) 2\cos 2x + \tan x = \frac{4}{5}$$



.....

.....

giasutrongtin.vn