

# CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## ÔN TẬP KIẾN THỨC ĐÃ HỌC

### I. HỆ THỨC CƠ BẢN

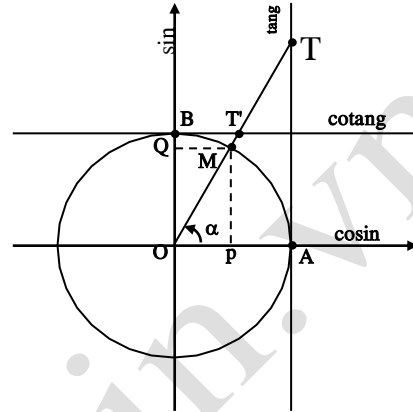
1. Định nghĩa các giá trị lượng giác:

$$\overline{OP} = \cos a$$

$$\overline{OQ} = \sin a$$

$$\overline{AT} = \tan a$$

$$\overline{BT'} = \cot a$$



Nhận xét:

- $\forall a, -1 \leq \cos a \leq 1; -1 \leq \sin a \leq 1$
- $\tan a$  xác định khi  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,
- $\cot a$  xác định khi  $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Dấu của các giá trị lượng giác:

Cung phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\sin a$	+	+	-	-
$\cos a$	+	-	-	+
$\tan a$	+	-	+	-
$\cot a$	+	-	+	-

3. Hệ thức cơ bản:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \quad \tan a \cdot \cot a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}; \quad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

4. Cung liên kết:

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém $\pi$	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

### 5. Bảng giá trị lượng giác của các góc (cung) đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	0		0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	

## II. CÔNG THỨC CỘNG

### Công thức cộng:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Hệ quả:  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

### III. CÔNG THỨC NHÂN

1. **Công thức nhân đôi:**

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}; \quad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$$

2. **Công thức hạ bậc:**

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \tan^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \end{aligned}$$

3. **Công thức nhân ba:**

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \tan 3a &= \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a} \end{aligned}$$

4. **Công thức biểu diễn  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\tan a$  theo  $t = \tan \frac{a}{2}$ :**

Đặt:  $t = \tan \frac{a}{2}$  ( $a \neq \pi + 2k\pi$ ) thì:  $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ ;  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ;  $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

### IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. **Công thức biến đổi tổng thành tích:**

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cdot \sin \left( a + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left( a - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin \left( a - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left( a + \frac{\pi}{4} \right)$$

2. **Công thức biến đổi tích thành tổng:**

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

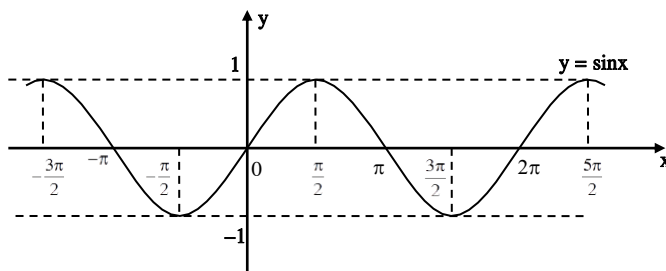
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]; \quad \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

**CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**  
**BÀI 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC**

**Chuyên đề: Tập xác định, tập giá trị, tính chẵn – lẻ, chu kỳ, đồ thị**

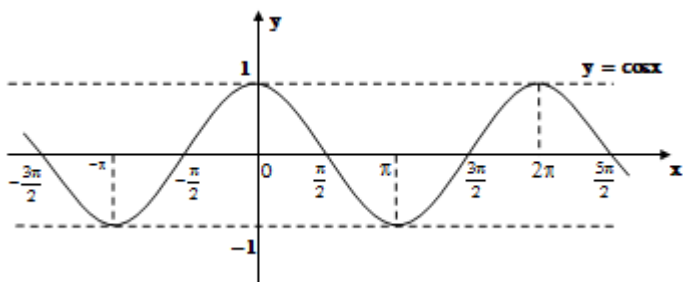
a)  $y = \sin x$  : Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ ; tập giá trị  $T = [-1, 1]$ ; hàm lẻ, chu kỳ  $T_0 = 2\pi$ .

Đồ thị



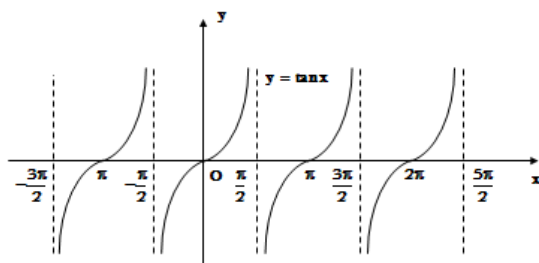
b)  $y = \cos x$  : Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ ; Tập giá trị  $T = [-1, 1]$ ; hàm chẵn, chu kỳ  $T_0 = 2\pi$ .

Đồ thị

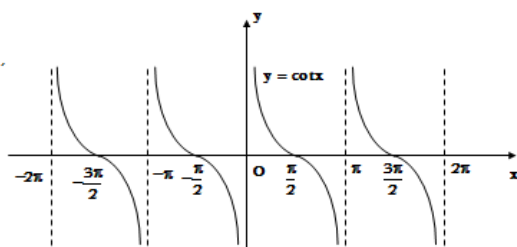


c)  $y = \tan x$  : Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; tập giá trị  $T = \mathbb{R}$ , hàm lẻ, chu kỳ  $T_0 = \pi$ .

Đồ thị



d)  $y = \cot x$  : Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ; tập giá trị  $T = \mathbb{R}$ , hàm lẻ, chu kỳ  $T_0 = \pi$ .



## Bài tập

Bài 1. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau:

$$a/ y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

.....

.....

.....

.....

$$b/ y = \sqrt{\sin x}$$

.....

.....

.....

.....

$$c/ y = \sqrt{2 - \sin x}$$

.....

.....

.....

.....

$$d/ y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

.....

.....

.....

.....

$$e/ y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$$

.....

.....

.....

.....

**Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:**

a/  $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b/  $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c/  $y = \sqrt{\sin x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$d/ y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$e/ y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f/ y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### 1. Phương trình $\sin u = \sin v$

$$a/ \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in Z)$$

$$b/ \begin{cases} \sin u = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \sin u = a \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin a + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in Z) \end{cases}$$

$$c/ \sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$$

$$d/ \sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$e/ \sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi (k \in Z)$$

$$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$$

$$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$$

### 2. Phương trình $\cos u = \cos v$

$$a/ \cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi (k \in Z)$$

$$b/ \begin{cases} \cos u = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \cos u = a \Leftrightarrow u = \pm \arccos a + k2\pi (k \in Z) \end{cases}$$

$$c/ \cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$d/ \cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$e/ \cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$$

$$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi (k \in Z)$$

$$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi (k \in Z)$$

### 3. Phương trình $\tan u = \tan v$

$$a/ \tan u = \tan \alpha \Leftrightarrow u = \alpha + k\pi (k \in Z)$$

$$b/ \tan u = a \Leftrightarrow u = \arctan a + k\pi (k \in Z)$$

$$c/ \tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$$

$$d/ \tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$



$$e/ \tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$$

**Các trường hợp đặc biệt:**

$$\tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**4. Phương trình  $\cot u = \cot v$**

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot u = a \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Các trường hợp đặc biệt:**

$$\cot u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**5. Một số điều cần chú ý:**

a/ Khi giải phương trình có chứa các hàm số tang, cotang, có mẫu số hoặc chứa căn bậc chẵn, thì nhất thiết phải đặt điều kiện để phương trình xác định.

\* Phương trình chứa  $\tan x$  thì điều kiện:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

\* Phương trình chứa  $\cot x$  thì điều kiện:  $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

\* Phương trình chứa cả  $\tan x$  và  $\cot x$  thì điều kiện  $x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

\* Phương trình có mẫu số:

- $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b/ Khi tìm được nghiệm phải kiểm tra điều kiện. Ta thường dùng một trong các cách sau để kiểm tra điều kiện:

1. Kiểm tra trực tiếp bằng cách thay giá trị của  $x$  vào biểu thức điều kiện.

2. Dùng đường tròn lượng giác.

3. Giải các phương trình vô định.

## BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình:

$$1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2) \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$5) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$6) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$$

$$7) \sin(3x+1) = \frac{1}{2}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$8) \cos(x-15^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$9) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$10) \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$11) \tan(2x-1) = \sqrt{3}$$

$$12) \cot(3x+10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$13) \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$14) \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$15) \cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.....  
**Bài 2.** Giải các phương trình:

1)  $\sin(3x+1) = \sin(x-2)$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3)  $\cos 3x = \sin 2x$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

$$4) \sin(x - 120^\circ) + \cos 2x = 0$$

$$5) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$6) \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$



$$7) \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$8) \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$9) \tan(2x+1) + \cot x = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$10) \cos(x^2 + x) = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$11) \sin(x^2 - 2x) = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$12) \tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$13) \cot^2 x = 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$14) \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$15) |\cos x| = \frac{1}{2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$16) \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 x$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....