**MỤC LỤC**

[**PHẦN I. KHỐI ĐA DIỆN** 54](#_Toc524253042)

[**1. KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP** 54](#_Toc524253043)

[**2. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN** 54](#_Toc524253044)

[2.1. Khái niệm về hình đa diện 54](#_Toc524253045)

[2.2. Khái niệm về khối đa diện 54](#_Toc524253046)

[**3. HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU** 55](#_Toc524253047)

[3.1. Phép dời hình trong không gian 55](#_Toc524253048)

[3.2. Hai hình bằng nhau 56](#_Toc524253049)

[**4. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN** 56](#_Toc524253050)

[**5. KHỐI ĐA DIỆN LỒI** 56](#_Toc524253051)

[5.1. Khối đa diện lồi 56](#_Toc524253052)

[5.2. Khối đa diện đều 57](#_Toc524253053)

[5.3. Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi 58](#_Toc524253054)

[**6. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN** 58](#_Toc524253055)

[6.1. Thể tích khối chóp 58](#_Toc524253056)

[6.2. Thể tích khối lăng trụ 58](#_Toc524253057)

[6.3. Thể tích khối hộp chữ nhật 59](#_Toc524253058)

[6.4. Thể tích khối lập phương 59](#_Toc524253059)

[6.5. Tỉ số thể tích 59](#_Toc524253060)

[6.6. Một số chú ý về độ dài các đường đặc biệt 59](#_Toc524253061)

[**7. CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG** 60](#_Toc524253062)

[7.1. Hệ thức lượng trong tam giác 60](#_Toc524253063)

[7.2. Các công thức tính diện tích 60](#_Toc524253064)

[**8. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP** 61](#_Toc524253065)

[**9. CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN** 63](#_Toc524253066)

[**PHẦN II. MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU** 64](#_Toc524253067)

[**1. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN** 64](#_Toc524253068)

[1.1. Mặt nón tròn xoay 64](#_Toc524253069)

[1.2. Khối nón 64](#_Toc524253070)

[1.3. Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng 65](#_Toc524253071)

[**2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY** 65](#_Toc524253072)

[2.1. Mặt trụ 65](#_Toc524253073)

[2.2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay 65](#_Toc524253074)

[**3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU** 66](#_Toc524253075)

[3.1. Mặt cầu 66](#_Toc524253076)

[3.2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng 66](#_Toc524253077)

[3.3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng 67](#_Toc524253078)

[3.4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu 67](#_Toc524253079)

[**4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI** 68](#_Toc524253080)

[4.1. Bài toán mặt nón 68](#_Toc524253081)

[4.2. Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt trụ 71](#_Toc524253082)

[**5. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU** 72](#_Toc524253083)

[5.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện 72](#_Toc524253084)

[5.2. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp 75](#_Toc524253085)

[5.3. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy 75](#_Toc524253086)

[5.4. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện 76](#_Toc524253087)

[5.5. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu 77](#_Toc524253088)

[**6. TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY** 78](#_Toc524253089)

[**6.1. Chỏm cầu** 78](#_Toc524253090)

[**6.2. Hình trụ cụt** 78](#_Toc524253091)

[**6.3. Hình nêm loại 1** 79](#_Toc524253092)

[**6.4. Hình nêm loại 2** 79](#_Toc524253093)

[6.5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay 79](#_Toc524253094)

[6.6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip 79](#_Toc524253095)

[6.7. Diện tích hình vành khăn 79](#_Toc524253096)

[6.8. Thể tích hình xuyến (phao) 79](#_Toc524253097)

[**PHẦN 3. HỆ TRỤC TỌA ÐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ** 80](#_Toc524253098)

[**1. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN** 80](#_Toc524253099)

[1.1. Các khái niệm và tính chất 80](#_Toc524253100)

[1.2. Phương pháp giải 1 số bài toán thường gặp 82](#_Toc524253101)

[**2. MẶT PHẲNG** 82](#_Toc524253102)

[2.1. Các khái niệm và tính chất 82](#_Toc524253103)

[2.2. Viết phương trình mặt phẳng 83](#_Toc524253104)

[2.3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng 85](#_Toc524253105)

[2.4. Khoảng cách và hình chiếu 85](#_Toc524253106)

[2.5. Góc giữa hai mặt phẳng 86](#_Toc524253107)

[2.6. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu 86](#_Toc524253108)

[**3. ĐƯỜNG THẲNG** 87](#_Toc524253109)

[3.1. Phương trình của đường thẳng 87](#_Toc524253110)

[3.2. Vị trí tương đối 87](#_Toc524253111)

[3.3. Góc trong không gian 90](#_Toc524253112)

[3.4. Khoảng cách 90](#_Toc524253113)

[3.5. Lập phương trình đường thẳng 91](#_Toc524253114)

[3.6. Vị trí tương đối 94](#_Toc524253115)

[3.7. Khoảng cách 94](#_Toc524253116)

[3.8. Góc 95](#_Toc524253117)

[**4. MẶT CẦU** 95](#_Toc524253118)

[4.1. Phương trình mặt cầu 95](#_Toc524253119)

[4.2. Giao của mặt cầu và mặt phẳng 96](#_Toc524253120)

[4.3. Một số bài toán liên quan 96](#_Toc524253121)

[**5. MỘT SỐ DẠNG GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN** 99](#_Toc524253122)

[5.1. Dạng 1 99](#_Toc524253123)

[5.2. Dạng 2 99](#_Toc524253124)

[5.3. Dạng 3 99](#_Toc524253125)

[5.4. Dạng 4 99](#_Toc524253126)

[5.5. Dạng 5 99](#_Toc524253127)

[5.6. Dạng 6 99](#_Toc524253128)

[5.7. Dạng 7 100](#_Toc524253129)

[5.8. Dạng 8 100](#_Toc524253130)

[5.9. Dạng 9 100](#_Toc524253131)

[5.10. Dạng 10 100](#_Toc524253132)

# PHẦN I. KHỐI ĐA DIỆN

## **1.** [**KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP**](https://giasutrongtin.vn/)

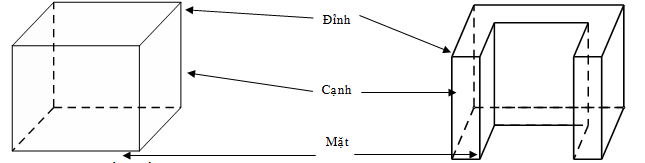
* Khối lăng trụ (chóp) là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (chóp) kể cả hình lăng trụ (chóp) ấy. Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.
* Điểm không thuộc khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) được gọi là điểm ngoài của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt). Điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt) đó được gọi là điểm trong của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cụt).



## **2. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN**

### 2.1. Khái niệm về hình đa diện

* Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:
* Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
* Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.
* Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.



### 2.2. Khái niệm về khối đa diện

* Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
* Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.
* Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



## **3. HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU**

### 3.1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm với điểm xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.



Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

\* Một số phép dời hình trong không gian:

**3.1.1. Phép tịnh tiến theo vectơ**



|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Là phép biến hình biến mỗi điểm thành sao cho . |  |

**3.1.2. Phép đối xứng qua mặt phẳng**



|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc  thành chính nó, biến mỗi điểm  không thuộc  thành điểm  sao cho  là mặt phẳng trung trực của .  Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng  biến hình  thành chính nó thì  được gọi là mặt phẳng đối xứng của . |  |

**3.1.3. Phép đối xứng qua tâm**



|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Là phép biến hình biến điểm thành chính nó, biến mỗi điểm khác thành điểm sao cho là trung điểm  Nếu phép đối xứng tâm biến hình thành chính nó thì được gọi là tâm đối xứng của |  |

**3.1.4. Phép đối xứng qua đường thẳng (phép đối xứng trục )**



|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng thành chính nó, biến mỗi điểm không thuộc thành điểm sao cho là đường trung trực của .  Nếu phép đối xứng trục biến hình thành chính nó thì được gọi là trục đối xứng của |  |

\* Nhận xét:

* Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
* Phép dời hình biến đa diện thành đa diện , biến đỉnh, cạnh, mặt của thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của .



### 3.2. Hai hình bằng nhau

Hai hình đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

## **4. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Nếu khối đa diện  là hợp của hai khối đa diện ,  sao cho  và  không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện  thành hai khối đa diện  và , hay có thể lắp ghép hai khối đa diện  và  với nhau để được khối đa diện . |  |

## **5. KHỐI ĐA DIỆN LỒI**

### 5.1. Khối đa diện lồi

Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu với bất kì hai điểm  và  nào của nó thì mọi điểm của đoạn  cũng thuộc khối đó.

**Khối đa diện lồi Khối đa diện không lồi**

### 5.2. Khối đa diện đều

**5.2.1. Định nghĩa**

* Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:
* Các mặt là những đa giác đều  cạnh.
* Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng  cạnh.
* Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại .

**5.2.2. Định lí**

Chỉ có 5 loại khối đa diện đều. Đó là loại , loại , loại , loại , loại . Tùy theo số mặt của chúng, 5 khối đa diện trên lần lượt có tên gọi là: Khối tứ diện đều; khối lập phương; khối bát diện đều; khối mười hai mặt đều; khối hai mươi mặt đều.

**5.2.3.** [**Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều**](https://giasutrongtin.vn/)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Khối đa diện đều** | | **Số đỉnh** | **Số cạnh** | **Số mặt** | **Loại** | **Số MPĐX** |
| Tứ diện đều |  | 4 | 6 | 4 |  | 6 |
| Khối lập phương |  | 8 | 12 | 6 |  | 9 |
| Bát diện đều |  | 6 | 12 | 8 |  | 9 |
| Mười hai mặt đều |  | 20 | 30 | 12 |  | 15 |
| Hai mươi mặt đều |  | 12 | 30 | 20 |  | 15 |

**Chú ý:** Giả sử khối đa diện đều loại  có  đỉnh,  cạnh và  mặt.

Khi đó: 

### 5.3. [Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi](https://giasutrongtin.vn/)

**5.3.1. Kết quả 1**

Cho một khối tứ diện đều. Khi đó:

* Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều;
* Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).

**5.3.2. Kết quả 2**

Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

**5.3.3. Kết quả 3**

Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một khối lập phương.

**5.3.4. Kết quả 4**

Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của khối bát diện đều. Khi đó:

* Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường
* Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau;
* Ba đường chéo bằng nhau.

## **6.** [**THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN**](https://giasutrongtin.vn/)

### 6.1. Thể tích khối chóp

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| * : Diện tích mặt đáy. * : Độ dài chiều cao khối chóp. |  |

### 6.2. Thể tích khối lăng trụ

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| * : Diện tích mặt đáy. * : Chiều cao của khối chóp.   **Lưu ý:**  Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên. |  |

### 6.3. Thể tích khối hộp chữ nhật

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

### 6.4. Thể tích khối lập phương

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

### 6.5. Tỉ số thể tích

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Thể tích hình chóp cụt**    Với là diện tích hai đáy và chiều cao. | S  A’  B’  C’  A  B  C |

### 6.6. Một số chú ý về độ dài các đường đặc biệt

* Đường chéo của hình vuông cạnh là



* Đường chéo của hình lập phương cạnh là :



* Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là :



* Đường cao của tam giác đều cạnh  là: 

## **7. CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG**

### 7.1. Hệ thức lượng trong tam giác

**7.1.1. Cho  vuông tại, đường cao **

* 
* 
* 
* 
* 
* 
* 

**7.1.2. Cho có độ dài ba cạnh là:  độ dài các trung tuyến là  bán kính đường tròn ngoại tiếp  ; bán kính đường tròn nội tiếp  nửa chu vi **

* Định lí hàm số cosin:



* Định lí hàm số sin:



* Độ dài trung tuyến:



### 7.2. Các công thức tính diện tích

**7.2.1. Tam giác**

* 
* 
* 
* 
* 
* vuông tại 
* đều, cạnh   , 

**7.2.2. Hình vuông**

*  ( cạnh hình vuông)

**7.2.3. Hình chữ nhật**

*  (: hai kích thước)

**7.2.4. Hình bình hành**

* S = đáy × cao 

**7.2.5. Hình thoi**

* 

**7.2.6. Hình thang**

*  ( hai đáy,: chiều cao)

**7.2.7. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc **

* 

## **8.** [**MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP**](https://giasutrongtin.vn/)

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hình chóp  với các mặt phẳng vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác  lần lượt là .  Khi đó: | ***C***  ***S***  ***A***  ***B*** |
| Cho hình chóp  có  vuông góc với , hai mặt phẳng  và vuông góc với nhau, .  Khi đó: | ***B***  ***C***  ***A***  ***S*** |
| Cho hình chóp đều  có đáy  là tam giác đều cạnh bằng  cạnh bên bằng .  Khi đó: | ***C***  ***A***  ***S***  ***B***  ***M***  ***G*** |
| Cho hình chóp tam giác đều  có cạnh đáy bằng  và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc .  Khi đó: | ***C***  ***A***  ***S***  ***B***  ***M***  ***G*** |
| Cho hình chóp tam giác đều  có các cạnh bên bằng  và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc .  Khi đó: | ***B***  ***S***  ***A***  ***C***  ***M***  ***G*** |
| Cho hình chóp tam giác đều  có các cạnh đáy bằng  cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc .  Khi đó: | ***B***  ***S***  ***A***  ***C***  ***M***  ***G*** |
| Cho hình chóp tứ giác đều  có đáy  là hình vuông cạnh bằng  và .  Khi đó: | ***O***  ***B***  ***S***  ***D***  ***A***  ***C***  ***M*** |
| Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh đáy bằng  góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là .  Khi đó: | ***O***  ***C***  ***S***  ***A***  ***D***  ***B***  ***M*** |
| Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh đáy bằng   với  Khi đó: | ***O***  ***C***  ***A***  ***D***  ***S***  ***B***  ***M*** |
| Cho hình chóp tứ giác đều  có các cạnh bên bằng  góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là  với .  Khi đó: | ***O***  ***C***  ***S***  ***A***  ***D***  ***B***  ***M*** |
| Cho hình chóp tam giác đều  có cạnh đáy bằng  Gọi  là mặt phẳng đi qua  song song với  và vuông góc với , góc giữa  với mặt phẳng đáy là .  Khi đó: | ***x***  ***N***  ***C***  ***A***  ***S***  ***B***  ***F***  ***M***  ***G***  ***E*** |
| Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh  Khi đó: | ***O1***  ***O3***  ***O4***  ***O2***  ***O***  ***O'***  ***A***  ***B***  ***C***  ***D***  ***B'***  ***C'***  ***D'***  ***A'*** |
| Cho khối tám mặt đều cạnh  Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương.  Khi đó: | ***B***  ***D***  ***A***  ***S***  ***C***  ***S'***  ***N***  ***G2***  ***M***  ***G1*** |

**9.** [**CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN**](https://giasutrongtin.vn/)

|  |  |
| --- | --- |
| **Công thức** | **Điều kiện tứ diện** |
| Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện |  |
| Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó |  |
| Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề |  |
| Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện |  |
|  | **Tứ diện đều**  tất cả các cạnh bằng |
|  | **Tứ diện gần đều** |

**PHẦN II. MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU**

## **1. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN**

### 1.1. Mặt nón tròn xoay

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Đường thẳng , cắt nhau tại  và tạo thành góc  với ,  chứa ,  quay quanh trục với góc  không đổi  mặt nón tròn xoay đỉnh   * gọi là trục. * được gọi là đường sinh. * Góc  gọi là góc ở đỉnh. |  |

### 1.2. Khối nón

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.  Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng. |  |

Cho hình nón có chiều cao  đường sinh  và bán kính đáy.

* **Diện tích xung quanh:** của hình nón: 
* **Diện tích đáy (hình tròn):** 
* **Diện tích toàn phần:** của hình nón: 
* **Thể tích khối nón**: 

### 1.3. Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng

|  |  |
| --- | --- |
| **Điều kiện** | **Kết quả** |
| **Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp  đi qua đỉnh của mặt nón.** | |
| * cắt mặt nón theo 2 đường sinh. * tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. | * Thiết diện là tam giác cân. * là mặt phẳng tiếp diện của hình nón. |
| **Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp  không đi qua đỉnh của mặt nón.** | |
| * vuông góc với trục hình nón. * song song với 2 đường sinh hình nón. * song song với 1 đường sinh hình nón. | * Giao tuyến là 1 đường parabol. * Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol. * Giao tuyến là một đường tròn. |

## **2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY**

### 2.1. Mặt trụ

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Trong mặt phẳng  cho hai đường thẳng  và  song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng . Khi quay mặt phẳng  xung quanh  thì đường thẳng  sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.   * Đường thẳng  gọi là trục. * Đường thẳng  là đường sinh. * là bán kính của mặt trụ đó. |  |

### 

### 2.2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Ta xét hình chữ nhật . Khi quay hình chữ nhật  xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc  sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ. |  |

* Khi quay quanh  hai cạnh  và  sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
* Độ dài đoạn  gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
* Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh  khi quay xung quanh  gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
* Khoảng cách  giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.Hình trụ có chiều cao  đường sinh  và bán kính đáy 

* **Diện tích xung quanh: **
* **Diện tích toàn phần: **
* **Thể tích: **

## **3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU**

### 3.1. Mặt cầu

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho điểm cố định và một số thực dương .  Tập hợp tất cả những điểm  trong không gian cách  một khoảng  được gọi là mặt cầu tâm  bán kính  **Kí hiệu:** Khi đó: |  |

### 3.2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu  và mặt phẳng . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên  là khoảng cách từ  đến mặt phẳng . Khi đó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung. | Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu:  là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và  **tiếp điểm.** | Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm  và bán kính |
|  |  |  |

**Lưu ý:**

Khi mặt phẳng  đi qua tâm  của mặt cầu thì mặt phẳng  được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**

### 3.3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu  và đường thẳng . Gọi  là hình chiếu của  lên . Khi đó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| không cắt mặt cầu. | tiếp xúc với mặt cầu.  : **Tiếp tuyến** của  **tiếp điểm.** | cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt. |
|  |  |  |

**Lưu ý:**

Trong trường hợp  cắt  tại 2 điểm  thì bán kính  của được tính như sau: 

### 3.4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến.  Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.  Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu |  |

\* Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu. |  |
| Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu.  Mặt cầu tâm  bán kính  ngoại tiếp hình chóp  khi và chỉ khi |  |

Cho mặt cầu 

* **Diện tích mặt cầu:** .
* **Thể tích khối cầu:** .

## **4.** [**MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI**](https://giasutrongtin.vn/)

### 4.1. Bài toán mặt nón

**4.1.1.Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Thiết diện qua trục** của hình nón là tam giác cân. |  |
| **Thiết diện qua đỉnh** của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón. |  |
| **Thiết diện vuông góc với trục** của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của  hình nón. |  |

**4.1.2. Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón**

Cho hình nón có chiều cao là , bán kính đáy và đường sinh .



Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là



|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Gọi  là trung điểm của  Khi đó:    * Góc giữa  và  là góc . * Góc giữa  và  là góc .   [**Diện tích thiết diện**](https://giasutrongtin.vn/) |  |

**4.1.3. Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Hình nón **nội tiếp** hình chóp  đều là hình nón có đỉnh là , đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông .  Khi đó hình nón có:   * Bán kính đáy , * Đường cao , đường sinh | Hình chóp tứ giác **đều** |
| Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp  đều là hình nón có đỉnh là , đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông .  Khi đó hình nón có:   * Bán kính đáy: * Chiều cao: * Đường sinh: | Hình chóp tứ giác **đều** |
| Hình nón **nội tiếp** hình chóp  đều là hình nón có đỉnh là , đáy là đường tròn nội tiếp tam giác  Khi đó hình nón có   * Bán kính đáy: * Chiều cao: * Đường sinh: | Hình chóp tam giác **đều** |
| Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp  đều là hình nón có đỉnh là , đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác  Khi đó hình nón có:   * Bán kính đáy: * Chiều cao:   Đường sinh: | Hình chóp tam giác **đều** |

**4.1.4. Dạng 4.** [**Bài toán hình nón cụt**](https://giasutrongtin.vn/)

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cụt**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn. |  |
| Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân. |  |
| Cho hình nón cụt có  lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.  Diện tích xung quanh của hình nón cụt:    Diện tích đáy (hình tròn):    Diện tích toàn phần của hình nón cụt:    Thể tích khối nón cụt: |  |

**4.1.5. Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Từ hình tròn  cắt bỏ đi hình quạt  Độ dài cung  bằng  Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó.  Hình nón được tạo thành có |  |

### 4.2. Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt trụ

**4.2.1. Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Thiết diện **vuông góc trục** là một đường tròn bán kính  Thiết diện **chứa trục** là một hình chữ nhật  trong đó  và . Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì .  Thiết diện **song song với trục** và **không chứa trục** là hình chữ nhật  có khoảng cách tới trục là: |  |

**4.2.2. Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Nếu như  và  là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì:    \* Đặc biệt:  Nếu  và  vuông góc nhau thì:  . |  |

**4.2.3. Dạng 3. Xác định góc khoảng cách**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Góc giữa  và trục : |  |
| Khoảng cách giữa  và trục :  . |  |
| Nếu  là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ.  Nghĩa là cạnh hình vuông:  . |  |

**4.2.4. Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Một khối trụ có thể tích  không đổi.   * Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:      * Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất: |  |

**4.2.5. Dạng 5.** [**Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng**](https://giasutrongtin.vn/)

Cho hình lăng trụ tam giác đêu nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là  thì thể tích khối trụ là 

Cho hình lăng trụ tứ giác đêu  ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là  thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là 

## **5. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU**

### 5.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

**5.1.1. Các khái niệm cơ bản**

**Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.



**Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.



**Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.



**5.1.2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**

**Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm  của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

**Bán kính**: là khoảng cách từ  đến các đỉnh của hình chóp.

**5.1.3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện**

**5.1.3.1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) Tâm là , là trung điểm của .  **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).  Bán kính: . |  |

**5.1.3.2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Xét hình lăng trụ đứng , trong đó có 2 đáyvà nội tiếp đường tròn  và . Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:   * **Tâm**:  với  là trung điểm của . * **Bán kính**: . |  |

**5.1.3.3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Hình chóp  có .   * Tâm:  là trung điểm của. * Bán kính: .   Hình chóp  có  .   * Tâm: là trung điểm của. * Bán kính: . |  |

**5.1.3.4. Hình chóp đều**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hình chóp đều   * Gọi là tâm của đáylà trục của đáy. * Trong mặt phẳng xác định bởi  và một cạnh bên, chẳng hạn như , ta vẽ đường trung trực của cạnh  là  cắt  tại  và cắt  tại  là tâm của mặt cầu.   Bán kính:  Ta có:  Bán kính: |  |

**5.1.3.5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hình chóp  có cạnh bên  và đáy  nội tiếp được trong đường tròn tâm .  Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp được xác định như sau:   * Từ tâm  ngoại tiếp của đường trònđáy, ta vẽ đường thẳng  vuông góc với  tại . * Trong , ta dựng đường trung trực của cạnh, cắttại, cắt tại  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính      * Tìm bán kính   Ta có: là hình chữ nhật.  Xét  vuông tại  có:  . |  |

**5.1.3.6. Hình chóp khác**

* Dựng trục của đáy.



* Dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên bất kì.



* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



* Bán kính: khoảng cách từ đến các đỉnh của hình chóp.



**5.1.3.7. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp**

Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.

∆ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.

O

Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.

O

Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.

O

O

∆ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).

∆ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh ∆.

O

### 

### 5.2. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hình chóp  (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:   * Bước 1:   Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.   * Bước 2:   Lập mặt phẳng trung trực  của một cạnh bên.  Lúc đó   * Tâm  của mặt cầu: * Bán kính: . Tuỳ vào từng trường hợp. |  |

### 5.3. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

**5.3.1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Định nghĩa**  Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.  **Tính chất**    Suy ra:  **Các bước xác định trục**   * Bước 1:   Xác định tâm  của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.   * Bước 2:   Qua  dựng  vuông góc với mặt phẳng đáy.  **Một số trường hợp đặc biệt**   * Đáy là tam giác vuông * Đáy là tam giác đều * Đáy là tam giác thường |  |

**5.3.2. Kỹ năng tam giác đồng dạng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| đồng dạng với . |  |

**5.3.3. Nhận xét quan trọng**

 là trục đường tròn ngoại tiếp .

### 5.4. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hình chóp (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). **Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:**   * Bước 1:   Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.   * Bước 2:   Xác định trục  của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (dễ xác định) của khối chóp.  Lúc đó:   * Tâm  của mặt cầu: * Bk: . Tuỳ vào từng trường hợp. |  |

### 5.5. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu

**5.5.1. Dạng 1**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cạnh bên  vuông góc đáy và  khi đó  và tâm là trung điểm . |  |

**5.5.2. Dạng 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cạnh bên  vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là , khi đó :   * (: nửa chu vi). * Nếu  vuông tại  thì:  . * Đáy là hình vuông cạnh  thì * nếu đáy là tam giác đều cạnh  thì . |  |

**5.5.3. Dạng 3**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Chóp có các cạnh bên bằng nhau:  :  .   * là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó  là giao hai đường chéo. * vuông, khi đó  là trung điểm cạnh huyền. * đều, khi đó  là trọng tâm, trực tâm. |  |

**5.5.4. Dạng 4**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Hai mặt phẳng  và  vuông góc với nhau và có giao tuyến . Khi đó ta gọi  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: |  |

**5.5.5. Dạng 5**

Chóp  có đường cao , tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là . Khi đó ta giải phương trình: . Với giá trị  tìm được ta có: .

**5.5.6. Dạng 6:** Bán kính mặt cầu nội tiếp: .

**6.** [**TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY**](https://giasutrongtin.vn/)

**6.1. Chỏm cầu**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

**6.2. Hình trụ cụt**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

**6.3. Hình nêm loại 1**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  | Description: D:\Phan mem hoc Cao Hoc\Do thi graphics\GeoGebra- Hoan LC\Hinh PICTURE\nemA.png |

**6.4. Hình nêm loại 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  | Description: D:\Phan mem hoc Cao Hoc\Do thi graphics\GeoGebra- Hoan LC\Hinh PICTURE\Nembv1.png |

### 6.5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

### 6.6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

### 6.7. Diện tích hình vành khăn

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

### 6.8. Thể tích hình xuyến (phao)

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
|  |  |

**PHẦN 7. HỆ TRỤC TỌA ÐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ**

## **1. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN**

### 1.1. Các khái niệm và tính chất

**1.1.1. Khái niệm mở đầu**

Trong không gian cho ba trục  phân biệt và vuông góc từng đôi một. Gốc tọa độ  truc hoành  trục tung  trục cao  các mặt tọa độ 

**1.1.2. Khái niệm về hệ trục tọa độ**

Khi không gian có hệ tọa độ thì gọi là không gian tọa độ  hay không gian 

Chú ý:



**1.1.3. Tọa độ véc tơ**



**1.1.4. Tọa độ điểm**



**1.1.5. Các công thức tọa độ cần nhớ**

Cho



* 



* 
* 
* 
* 
* 
* 
* ****

**1.1.6. Chú ý**

Góc của 2 véc tơ là góc hình học (nhỏ) giữa 2 tia mang véc tơ có, giá trị trong là:



**1.1.7. Chia tỉ lệ đoạn thẳng**

M chia AB theo tỉ số k nghĩa là



Công thức tọa độ của M là :



**1.1.8. Công thức trung điểm**

Nếu  là trung điểm  thì



**1.1.9. Công thức trọng tâm tam giác**

Nếu  là trọng tâm của  thì



**1.1.10. Công thức trọng tâm tứ diện**

Nếu  là trọng tâm của tứ diện  thì



**1.1.11. Tích có hướng 2 véc tơ**

Cho 2 véc tơ và ta định nghĩa tích có hướng của 2 véc tơ đó là một véc tơ, kí hiệu hay có toạ độ:



**1.1.12. Tính chất tích có hướng 2 véc tơ**

* +  vuông góc với  và 
  + 
  + cùng phương

**1.1.13.** [**Ứng dụng tích có hướng 2 véc tơ**](https://giasutrongtin.vn/)

* + Diện tích hình bình hành :



* + Diện tích :



* + Ba véc tơ đồng phẳng:



* + Thể tích khối hộp có đáy hình bình hành  và cạnh bên:



* + Thể tích khối tứ diện:



### 1.2. [Phương pháp giải 1 số bài toán thường gặp](https://giasutrongtin.vn/)

**1.2.1. Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm**

**Phương pháp giải**

* + Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
  + Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

**1.2.2. Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích**

**Phương pháp giải**

* + Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
  + Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.
  + Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.
  + Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:
*  thẳng hàng  cùng phương  
*  là hình bình hành 
* Cho  có các chân  của các đường phân giác trong và ngoài của góc  của trên .

Ta có: , 

*  không đồng phẳng  không đồng phẳng



## **2.** [**MẶT PHẲNG**](https://giasutrongtin.vn/)

### 2.1. Các khái niệm và tính chất

**2.1.1. Khái niệm về véc tơ pháp tuyến**

khác và có giá vuông góc  được gọi là véc tơ pháp tuyến của 



**2.1.2. Tính chất của véc tơ pháp tuyến**

Nếu là véc tơ pháp tuyến của  thì  cũng là véc tơ pháp tuyến của 



**2.1.3. Phương trình tổng quát của** 

Phương trình tổng quát của qua và có véc tơ pháp tuyến là



**2.1.4. Khai triển của phương trình tổng quát**

Dạng khai triển của phương trình tổng quát là: (trong đó  không đồng thời bằng 0)



**2.1.5. Những trường hợp riêng của phương trình tổng quát**

*  qua gốc tọa độ 
*  song song hoặc trùng 
*  song song hoặc trùng 
*  song song hoặc trùng 
*  song song hoặc chứa 
*  song song hoặc chứa 
*  song song hoặc chứa 
*  cắt  tại  cắt  tại  và cắt  tại  có phương trình 

**2.1.6. Khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng**

Cho và ;



**2.1.7. Chùm mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai  mặt phẳng và  được gọi là một chùm mặt phẳng  Gọi  là giao tuyến của hai mặt phẳng  và .  Khi đó nếu  là mặt phẳng chứa  thì mặt phẳng  có dạng :    Với |  |

### 2.2. Viết phương trình mặt phẳng

Để lập phương trình mặt phẳng ta cần xác định một điểm thuộc  và một VTPT của nó.

**2.2.1. Dạng 1**

đi qua điểm  có VTPT  thì:



**2.2.2. Dạng 2**

đi qua điểm  có cặp VTCP thì là một VTPT của 

**2.2.3. Dạng 3**

**** đi qua điểm  và song song với  thì

**2.2.4. Dạng 4**

đi qua 3 điểm không thẳng hàng . Khi đó ta có thể xác định một VTPT của là: 

**2.2.5. Dạng 5**

đi qua một điểm  và một đường thẳng  không chứa :

* Trên  lấy điểm  và VTCP .
* Một VTPT của  là: 

**2.2.6. Dạng 6**

đi qua một điểm , vuông góc với đường thẳng  thì VTCP  của đường thẳng  là một VTPT của .

**2.2.7. Dạng 7**

chứa đường thẳng cắt nhau 

* Xác định các VTCP  của các đường thẳng 
* Một VTPT của  là: .
* Lấy một điểm  thuộc d1 hoặc 

**2.2.8. Dạng 8**

chứa đường thẳng  và song song với đường thẳng  ( chéo nhau

* Xác định các VTCP  của các đường thẳng 
* Một VTPT của  là: .
* Lấy một điểm  thuộc 

**2.2.9. Dạng 9**

đi qua điểm  và song song với hai đường thẳng chéo nhau :

* Xác định các VTCP  của các đường thẳng 
* Một VTPT của  là: .

**2.2.10. Dạng 10**

 chứa một đường thẳng  và vuông góc với một mặt phẳng 

* Xác định VTCP  của  và VTPT  của 
* Một VTPT của  là: .
* Lấy một điểm  thuộc 

**2.2.11. Dạng 11**

đi qua điểm  và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau 

* Xác định các VTPT  của  và 
* Một VTPT của  là: .

**2.2.12. Dạng 12**

**** chứa đường thẳng  cho trước và cách điểm  cho trước một khoảng  cho trước:

* Giả sử (α) có phương trình: .
* Lấy 2 điểm ta được hai phương trình )
* Từ điều kiện khoảng cách , ta được phương trình 
* Giải hệ phương trình  (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

**2.2.13. Dạng 13**

là tiếp xúc với mặt cầu tại điểm 

* Giả sử mặt cầu  có tâm  và bán kính 
* Một VTPT của  là: 

### 2.3. [Vị trí tương đối của hai mặt phẳng](https://giasutrongtin.vn/)

Cho hai mặt phẳng  và 

Khi đó:

*  cắt  
*  
*  
*  

### 2.4. Khoảng cách và hình chiếu

**2.4.1. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng**

Khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  là 

**2.4.2.** [**Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song**](https://giasutrongtin.vn/)

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

**2.4.3. Hình chiếu của 1 điểm lên mặt phẳng**

Điểm  là hình chiếu của điểm  trên .

**2.4.4. Điểm đối xứng của 1 điểm qua mặt phẳng**

Điểm  đối xứng với điểm  qua 

### 2.5. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng  có phương trình: 

Góc giữa  bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT .



Chú ý:  ; 

### 2.6. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu

Cho mặt phẳng  và mặt cầu  có tâm 

*  và  không có điểm chung 
*  tiếp xúc với  với là tiếp diện

Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:

* Viết phương trình đường thẳng  đi qua tâm  của  và vuông góc với .
* Tìm toạ độ giao điểm  của  và .  là tiếp điểm của  với .
*  cắt  theo một đường tròn 

Để xác định tâm  và bán kính  của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:

* Viết phương trình đường thẳng  đi qua tâm  của  và vuông góc với .
* Tìm toạ độ giao điểm  của  và . Với  là tâm của đường tròn giao tuyến của  với .
* Bán kính  của đường tròn giao tuyến: 

## **3. ĐƯỜNG THẲNG**

### 3.1. Phương trình của đường thẳng

**3.1.1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng**

**3.1.1.1. Ðịnh nghĩa**

Cho đường thẳng . Nếu vectơ và có giá song song hoặc trùng với đường phẳng thì  được gọi là vectơ chỉ phương của đường phẳng . Kí hiệu:



**3.1.1.2. Chú ý**

* là VTCP của thì cũng là VTCP của



* Nếu đi qua hai điểm thì là một VTCP của



* Trục có vectơ chỉ phương



* Trục có vectơ chỉ phương



* Trục có vectơ chỉ phương



**3.1.2. Phương trình tham số của đường thẳng**

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm và nhận làm VTCP là :



O



**3.1.3. Phương trình chính tắc của đường thẳng**

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm và nhận làm VTCP là 



### 3.2. Vị trí tương đối

**3.2.1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng**

a



a



a



**3.2.1.1. Phương pháp hình học**

**Định lý**

Trong không gian  cho đường thẳng có VTCP và qua và mặt phẳng có VTPT



Khi đó :

* 

a



* 
* 

**Đặc biệt**

và cùng phương 



**3.2.1.1.** [**Phương pháp đại số**](https://giasutrongtin.vn/)

Muốn tìm giao điểm  của và ta giải hệ phương trình: tìm Suy ra: .



Thế vào phương trình và rút gọn dưa về dạng:



*  cắt  tại một điểm  có một nghiệm .
*  song song với  vô nghiệm.
* nằm trong có vô số nghiệm .



* vuông góc và cùng phương



**3.2.2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng**



**3.2.2.1. Phương pháp hình học**

Cho hai đường thẳng:  đi qua  và có một vectơ chỉ phương 

 đi qua  và có một vectơ chỉ phương 

*  
*  
*  cắt  
*  và  chéo nhau 

**3.2.2.2. Phương pháp đại số**

Muốn tìm giao điểm  của ta giải hệ phương trình : tìm Suy ra:



**3.2.3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu**

Cho đường thẳng  và mặt cầu có tâm , bán kính



**3.2.3.1.** [**Phương pháp hình học**](https://giasutrongtin.vn/)

* Bước 1:

Tính khoảng cách từ tâm của mặt cầu đến đường thẳng là



* Bước 2:

So sánh với bán kính của mặt cầu:



* Nếu thì không cắt



* Nếu  thì  tiếp xúc 
* Nếu  thì  cắt tại hai điểm phân biệt  và  vuông góc vớiđường kính (bán kính) mặt cầu

**3.2.2.2. Phương pháp đại số**

Thế vào phương trình và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo



* Nếu phương trình  vô nghiệm thì không cắt 



* Nếu phương trình có một nghiệm thì tiếp xúc



* Nếu phương trình có hai nghiệm thì cắt tại hai điểm phân biệt



**Chú ý**:

Ðể tìm tọa độ ta thay giá trị vào phương trình đường thẳng



### 3.3. Góc trong không gian

**3.3.1. Góc giữa hai mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Định lý**  Trong không gian  cho hai mặt phẳng  xác định bởi phương trình :    Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng ta có công thức: |  |

**3.3.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho đường thẳng  và mặt phẳng  Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng ta có công thức: |  |

**3.3.3. Góc giữa hai đường thẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho hai đường thẳng :    Gọi  là góc giữa hai mặt phẳng ta có công thức: |  |

### 3.4. [Khoảng cách](https://giasutrongtin.vn/)

**3.4.1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **C**ho mặt phẳng  và điểm  Khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  được tính bởi : |  |

**3.4.2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| Cho đường thẳng  đi qua điểm  và có VTCP . Khi đó khoảng cách từ điểm M1 đến  được tính bởi công thức: |  |

**3.4.3. Khoảng cách giữa đường thẳng chéo nhau**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Hình vẽ** |
| **Định lý:**  Trong không gian  cho hai đường thẳng chéo nhau :    Khi đó khoảng cách giữa  được tính bởi công thức |  |

### 3.5. Lập phương trình đường thẳng

Để lập phương trình đường thẳng  ta cần xác định 1 điểm thuộc  và một VTCP của nó.

**3.5.1. Dạng 1**

 đi qua điểm  và có VTCP  là.

**3.5.2. Dạng 2**

 đi qua hai điểm  Một VTCP của  là .

**3.5.3. Dạng 3**

 đi qua điểm  và song song với đường thẳng  cho trước: Vì  nên VTCP của  cũng là VTCP của .

**3.5.4. Dạng 4**

 đi qua điểm  và vuông góc với mặt phẳng cho trước: Vì nên VTPT của cũng là VTCP của .

**3.5.5. Dạng 5**

 là giao tuyến của hai mặt phẳng :

* Cách 1:

Tìm một điểm và một VTCP.

* Tìm toạ độ một điểm bằng cách giải hệ phương trình  (với việc chọn giá trị cho một ẩn)
* Tìm một VTCP của 
* Cách 2:

Tìm hai điểm  thuộc , rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

**3.5.6. Dạng 6**

đi qua điểm  và vuông góc với hai đường thẳng 

Vì  nên một VTCP của  là: 

**3.5.7. Dạng 7**

 đi qua điểm , vuông góc và cắt đường thẳng .

* Cách 1:

Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên đường thẳng . Thì . Khi đó đường thẳng  là đường thẳng đi qua 

* Cách 2:

Gọi là mặt phẳng đi qua  và vuông góc với là mặt phẳng đi qua  và chứa  Khi đó 

**3.5.8. Dạng 8**

****đi qua điểm  và cắt hai đường thẳng 

* Cách 1:

Gọi Từ điều kiện  thẳng hàng ta tìm được Từ đó suy ra phương trình đường thẳng .

* Cách 2:

Gọi , . Khi đó  Do đó, một VTCP củacó thể chọn là .

**3.5.9. Dạng 9**

**** nằm trong mặt phẳng và cắt cả hai đường thẳng 

Tìm các giao điểm 

Khi đó  chính là đường thẳng 

**3.5.10. Dạng 10**

Viết phương trình mặt phẳng chứa  và mặt phẳng chứa  và 

Khi đó 

**3.5.11. Dạng 11**

**** là đường vuông góc chung của hai đường thẳng **** chéo nhau:

* Cách 1:

Gọi Từ điều kiện , ta tìm được  Khi đó, **** là đường thẳng

* Cách 2:
* Vì  và  nên một VTCP của có thể là: .
* Lập phương trình mặt phẳng chứavà bằng cách:
* Lấy một điểm  trên 
* Một VTPT của có thể là: .
* Tương tự lập phương trình mặt phẳng  chứavà  Khi đó 

**3.5.12. Dạng 12**

**** là hình chiếu của đường thẳng  lên mặt phẳng  thì ta Lập phương trình mặt phẳng chứa  và vuông góc với mặt phẳng bằng cách:

* Lấy .
* Vì chứa  và vuông góc với nên .
* Khi đó 

**3.5.13. Dạng 13**

**** đi qua điểm , vuông góc với và cắt 

* Cách 1:

Gọi  là giao điểm củavà Từ điều kiện ta tìm được  Khi đó, ****là đường thẳng 

* Cách 2:
* Viết phương trình mặt phẳng qua  và vuông góc với 
* Viết phương trình mặt phẳng chứa  và 
* Khi đó 

### 3.6. Vị trí tương đối

**3.6.1.** [**Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**](https://giasutrongtin.vn/)

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

* Phương pháp hình học:

Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.

* Phương pháp đại số:

Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

**3.6.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

* Phương pháp hình học:

Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.

* Phương pháp đại số:

Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.

**3.6.3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu**

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

* Phương pháp hình học:

Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.

* Phương pháp đại số:

Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.

### 3.7. Khoảng cách

**3.7.1. Khoảng cách từ điểm  đến đường thẳng **

* Cách 1:

Cho đường thẳng  đi qua  và có VTCP  thì 

* Cách 2:
* Tìm hình chiếu vuông góc  của  trên đường thẳng 
* 
* Cách 3:
* Gọi  Tính theo tham số trong phương trình đường thẳng 
* Tìm  để  nhỏ nhất.
* Khi đó Do đó 

**3.7.2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

Cho hai đường thẳng chéo nhau và  Biết  đi qua điểm M1 và có VTCP ,  đi qua điểm  và có VTCP  thì 

**Chú ý:**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  bằng khoảng cách giữa với mặt phẳng  chứa  và song song với 

**3.7.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

**3.7.4. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song**

Khoảng cách giữa đường thẳngvới mặt phẳng  song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm  bất kì trênđến mặt phẳng **.**

### 3.8. Góc

**3.8.1. Góc giữa hai đường thẳng**

Cho hai đường thẳng  lần lượt có các VTCP .

Góc giữa  bằng hoặc bù với góc giữa  là: 

**3.8.2. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng**

Cho đường thẳng  có VTCP  và mặt phẳng  có VTPT .

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng  bằng góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên  là: 

## **4. MẶT CẦU**

### 4.1. Phương trình mặt cầu

**4.1.1. Phương trình chính tắc**

Phương trình của mặt cầu tâm bán kính là:



Phương trình được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu



Đặc biệt: Khi thì



**4.1.2. Phương trình tổng quát**

Phương trình : với là phương trình của mặt cầu có tâm bán kính .



### 4.2. Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt phẳng và mặt cầu có phương trình :



Gọi là khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng



Cho mặt cầu  và mặt phẳng .

Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung. | Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu:  là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và : **tiếp điểm.** | Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm  và bán kính |
|  |  |  |

### 4.3. Một số bài toán liên quan

**4.3.1. Dạng 1**

 có tâm  và bán kính  thì 

**4.3.2. Dạng 2**

**** có tâm  và đi qua điểm  thì bán kính .

**4.3.3. Dạng 3**

 nhận đoạn thẳng  cho trước làm đường kính:

* Tâm  là trung điểm của đoạn thẳng



* Bán kính .

**4.3.4. Dạng 4**

 đi qua bốn điểm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện)

* Giả sử phương trình mặt cầu  có dạng:



* Thay lần lượt toạ độ của các điểm  vào  ta được 4 phương trình.
* Giải hệ phương trình đó, ta tìm được  Phương trình mặt cầu .

**4.3.5. Dạng 5**

 đi qua ba điểm  và có tâm  nằm trên mặt phẳng  cho trước thì giải tương tự dạng 4

**4.3.6. Dạng 6**

 có tâm  và tiếp xúc với mặt cầu  cho trước:

* Xác định tâm và bán kính của mặt cầu .



* Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính  của mặt cầu . (Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và ngoài)

**Chú ý:**

Với phương trình mặt cầu



với thì có tâm và bán kính .



**Đặc biệt:**

Cho hai mặt cầu và



* trong nhau



* ngoài nhau



* tiếp xúc trong



* tiếp xúc ngoài



* cắt nhau theo một đường tròn (đường tròn giao tuyến).



**4.3.7. Dạng 7**

Viết phương trình mặt cầu có tâm , tiếp xúc với mặt phẳng cho trước thì bán kính mặt cầu



**4.3.8. Dạng 8**

Viết phương trình mặt cầu có tâm , cắt mặt phẳng cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện .



* Đường tròn cho trước (bán kính hoặc diện tích hoặc chu vi) thì từ công thức diện tích đường tròn  hoặc chu vi đường tròn  ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến .
* Tính 
* Tính bán kính mặt cầu 
* Kết luận phương trình mặt cầu.

**4.3.9. Dạng 9**

Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với một đường thẳng cho trước và có tâm cho trước thì đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu ta có .



**4.3.10. Dạng 10**

Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với một đường thẳng tại tiếp điểm thuộc và có tâm thuộc đường thẳng cho trước thì ta làm như sau:



* Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm và vuông góc với đường thẳng .



* Toạ độ tâm là nghiệm của phương trình.



* Bán kính mặt cầu .



* Kết luận về phương trình mặt cầu



**4.3.10. Dạng 10**

Viết phương trình mặt cầu có tâm và cắt đường thẳng tại hai điểm thoả mãn điều kiện:



* Độ dài là một hằng số.



* Tam giác là tam giác vuông.



* Tam giác là tam giác đều.



Thì ta xác định , vì cân tại nên và bán kính mặt cầu  được tính như sau:



* 

**4.3.11. Dạng 11**

Tập hợp điểm là mặt cầu. Giả sử tìm tập hợp điểm  thoả tính chất  nào đó.

* Tìm hệ thức giữa các toạ độ  của điểm 

 hoặc: 

* Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

**4.3.12. Dạng 12**

Tìm tập hợp tâm mặt cầu

* Tìm toạ độ của tâm , chẳng hạn: 
* Khử  trong  ta có phương trình tập hợp điểm.
* Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

## **5. MỘT SỐ DẠNG GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN**

### 5.1. Dạng 1

Cho  và hai điểm  Tìm để ?

**Phương pháp**

* Nếu  và  trái phía so với  thẳng hàng
* Nếu  và  cùng phía so với  thì tìm  là đối xứng của  qua 

### 5.2. Dạng 2

Cho  và hai điểm  Tìm để ?

**Phương pháp**

* Nếu  và  cùng phía so với  thẳng hàng
* Nếu  và  trái phía so với  thì tìm  là đối xứng của  qua 



### 5.3. Dạng 3

Cho điểm  không thuộc các trục và mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình  qua  và cắt 3 tia  lần lượt tại  sao cho  nhỏ nhất?

**Phương pháp** 

### 5.4. Dạng 4

Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng , sao cho khoảng cách từ điểm  đến  là lớn nhất?

**Phương pháp** 

### 5.5. Dạng 5

Viết phương trình mặt phẳng  qua và cách  một khảng lớn nhất ?

**Phương pháp** 

### 5.6. Dạng 6

Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng , sao cho  tạo với  ( không song song với ) một góc lớn nhất là lớn nhất ?

**Phương pháp** 

### 5.7. Dạng 7

Cho . Viết phương trình đường thẳng  nằm trong (P) song song với  và cách  một khoảng nhỏ nhất ?

**Phương pháp**

Lấy  , gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên  thì .

### 5.8. Dạng 8

Viết phương trình đường thẳng  đi qua điểm  cho trước và nằm trong mặt phẳng cho trước sao cho khoảng cách từ điểm  cho trước đến  là lớn nhất ( không vuông góc với ) ?

**Phương pháp** 

### 5.9. Dạng 9

Viết phương trình đường thẳng  đi qua điểm  cho trước và nằm trong mặt phẳng cho trước sao cho khoảng cách từ điểm  cho trước đến  là nhỏ nhất ( không vuông góc với ) ?

**Phương pháp** 

### 5.10. Dạng 10

Viết phương trình đường thẳng  đi qua điểm cho trước, sao cho nằm trong và tạo với đường thẳng  một góc nhỏ nhất ( cắt nhưng không vuông góc với )?

**Phương pháp**

