

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D .

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases} \quad m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$$

Tính chất:

a) Nếu hàm số f đồng biến trên $[a; b]$ thì $\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$.

Lưu ý: Hàm số: $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (1)

+ Hàm số (1) đồng biến trên $[e; h]$ thì GTLN trên $[e, h]$ là $f(h)$, GTNN trên $[e, h]$ là $f(e)$

+ Hàm số (1) nghịch biến trên $[e; h]$ thì GTLN trên $[e, h]$ là $f(e)$, GTNN trên $[e, h]$ là $f(h)$

II. QUY TẮC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Loại 1: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng $(a; b)$, nửa khảng $[a;)$, $(a; b]$.

B1: Tính $f'(x)$.

B2: Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

B3: Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Loại 2: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$.

B1: Tính $f'(x)$.

B2: Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm được các nghiệm x_1, x_2, \dots, x_n trên $[a; b]$ (nếu có).

B3: Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

B4: So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max \{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \}$$

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min \{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \}$$

III. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - x^4$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên \mathbb{R}

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 12x^2 - 4x^3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	+	0	+	0	-
y	$-\infty$		27	$-\infty$	

Vậy $\max f(x) = 27$; $\min f(x)$ không tồn tại trên \mathbb{R}

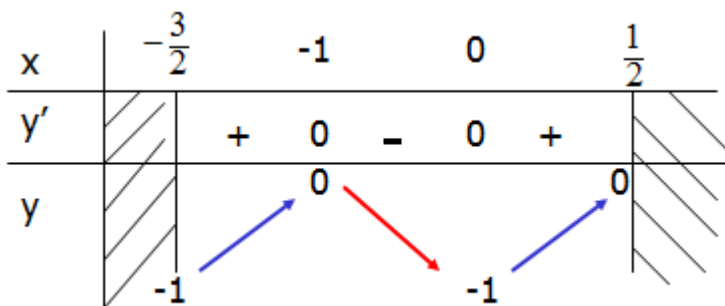
Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ trên:

a $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **b** $(-2,1)$

Giải

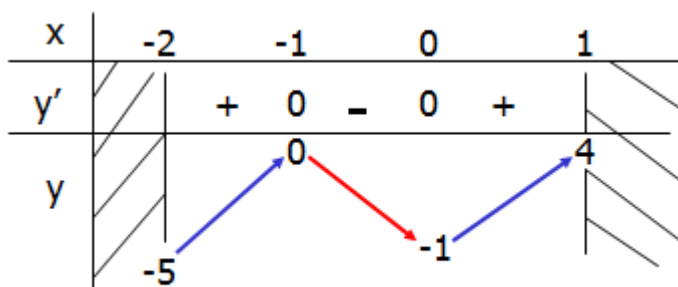
a) $y' = 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Xét trên khoảng $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Vậy Max $f(x)=0$ đạt tại $x=-1$; min $f(x)=-1$ đạt tại $x=0$

b) Xét trên khoảng $(-2; 1)$



Vậy hàm số không có GTLN, GTNN trên $(-2,1)$

Nhận xét.

GTLN, GTNN của một hàm số trên khoảng có thể có, có thể không.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y = f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên $[-1;1]$

Giải.

Xét trên $[-1;1]$

Ta có : $f'(x) = 6x^2 - 12x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad (x = 2 \text{ loại})$$

Tính : $f(-1) = -7; f(0) = 1; f(1) = -3.$

Vậy : $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$; $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = -7$

Ví dụ 4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên:

- a) $[-2,1]$ b) $[1,3]$

Giải:

a) Xét trên $[-2,1]$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 0 \quad \begin{cases} x = 0(n) \\ x = -1(n) \end{cases}$$

Tính $f(-2) = -5; f(-1) = 0; f(0) = -1; f(1) = 4.$

Vậy $\max_{[-2;1]} f(x) = f(1) = 4$; $\min_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = -5.$

b) Xét trên $[1;3]$

Ta có bảng biến thiên

x	1	3
y'	+	
y	4	80

Vậy $\min_{[1;3]} f(x) = f(1) = 4$; $\max_{[1;3]} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \sqrt{2x} + \sqrt{6-x}$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 6]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}}$$

$$\bullet y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2\sqrt{6-x} \Leftrightarrow 2x = 4(6-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$y(0) = \sqrt{6}; \quad y(6) = 2\sqrt{3}; \quad y(4) = 3\sqrt{2}$$

Vậy GTNN là $\sqrt{6}$, GTLN là $3\sqrt{2}$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Giá trị lớn nhất trên đoạn của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. 2

B. 11

C. 0

D. 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 5$. Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A. $\max_{[0;2]} y = 5$

B. $\min_{[0;2]} y = 3$

C. $\max_{[-1;1]} y = 3$

D. $\min_{[-1;1]} y = 7$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A. $\max_{[-1;0]} y = \frac{1}{2}$

B. $\min_{[-1;2]} y = \frac{1}{2}$

C. $\max_{[-1;1]} y = \frac{1}{2}$

D. $\min_{[3;5]} y = \frac{11}{4}$

A. $\max_{[0;1]} y = -1$

B. $\min_{[0;1]} y = 0$

C. $\max_{[-2;0]} y = 3$

D. $\min_{[0;1]} y = -1$

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1000$ trên $[-1; 0]$

A. 1001

B. 1000

C. 1002

D. -996

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ là

A. 0

B. 4

C. -2

D. 2

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 3x$ trên $[-2; 0]$ là

- A. $\frac{5}{3}$ B. 0 C. $-\frac{2}{3}$ D. 3

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 5}$ là

- A. $\frac{29}{4}$ B. -5 C. 5 D. $\frac{13}{2}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x}$ là

- A. 0 và $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1 C. 0 và $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. 1 và $\frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

.....
.....
.....
.....
.....
Câu 22. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;4]$ lần lượt là

A. -3 và -5

B. -3 và -4

C. -4 và -5

D. -3 và -7

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Câu 23. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là

A. -1 và -3

B. 0 và -2

C. -1 và -2

D. 1 và -2

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. -2.

D. 2.

Câu 25. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ lần lượt là

- A. 2 và $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. 2 và $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 2 và $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 3 và $\frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 27. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ lần lượt là

- A. 3 và 2 B. 3 và 0 C. 2 và 1 D. 3 và 1

Câu 28. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ lần lượt là

- A. $2\sqrt{2}$ và 2 B. $2\sqrt{2}$ và -2 C. 2 và -2 D. $\sqrt{2}$ và -2

Câu 31. (Đề THPTQG 2017). Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $m < -1$. **B.** $3 < m \leq 4$. **C.** $m > 4$ **D.** $1 \leq m < 3$

Câu 32. (Minh Họa 2019-2020). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A.** 1 **B.** 37 **C.** 33 **D.** 12 .

Câu 33. (Mã đề 108 THPT QG 2019). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-3; 3]$ bằng:

- A.** 4 **B.** 0 **C.** 20 **D.** -16

.....
.....
.....
Câu 34. (Đề 103 THPT.QG - 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$

- A.** $m = \frac{51}{4}$ **B.** $m = \frac{49}{4}$ **C.** $m = 13$ **D.** $m = \frac{51}{2}$
-
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 35. (Đề tham khảo - THPT.QG 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng:

- A.** 50 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 122
-
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 36. (Đề 102 THPT.QG 2018). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0 ; 4]$ bằng:

- A.** -259 **B.** 68 **C.** 0 **D.** -4
-
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 37. (Đề 104 THPTQG2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn

$$\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$$

A. $m = \frac{17}{4}$

B. $m = 10$

C. $m = 5$

D. $m = 3$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 38. (Đề 103 THPT.QG - 2018). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$

bằng:

A. -4

B. -16

C. 0

D. 4

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 39. (Đề 104 THPT.QG 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$

bằng:

A. 25

B. $\frac{51}{4}$

C. 13

D. 85

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 43. (Đề minh họa 1 THPT.QG - 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên

đoạn $[2; 4]$

A. $\min_{[2;4]} y = 6.$

B. $\min_{[2;4]} y = -2.$

C. $\min_{[2;4]} y = -3.$

D.

$\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$

Câu 44. (Đề minh họa 3, THPT.QG - 2017). Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên

khoảng $(0; +\infty)$

A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}.$

B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$

D.

$\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

Câu 45. (Đề minh họa 3 THPT.QG -2017). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y_{CD} = 5$

B. $y_{CT} = 0$

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-		
y	$+\infty$			4		5		$-\infty$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

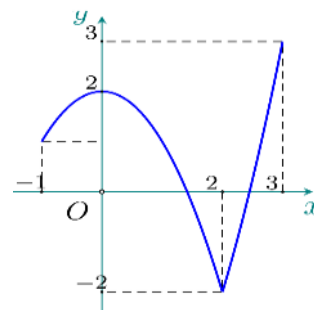
Câu 49. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(\text{cm}^2)$. Hỏi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

- A. $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ B. $20\text{cm} \times 5\text{cm}$ C. $25\text{cm} \times 4\text{cm}$ D. Đáp án khác

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 50. (THPT 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

- A. 3, 2 B. 3, -2 C. 3, -1 D. 2, -2.



.....
.....
.....
.....
.....
.....

Chúc các em thành công !.