

# GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

## §3

### I. Định nghĩa:

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên miền  $D$ .

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \quad m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

### Tính chất:

a) Nếu hàm số  $f$  đồng biến trên  $[a; b]$  thì  $\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$ ,  $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$ .

b) Nếu hàm số  $f$  nghịch biến trên  $[a; b]$  thì  $\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$ ,  $\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$ .

**Lưu ý: Hàm số:**  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  (1)

+ Hàm số (1) đồng biến trên  $[e; h]$  thì GTLN trên  $[e, h]$  là  $f(h)$ , GTNN trên  $[e, h]$  là  $f(e)$

+ Hàm số (1) nghịch biến trên  $[e; h]$  thì GTLN trên  $[e, h]$  là  $f(e)$ , GTNN trên  $[e, h]$  là  $f(h)$

### II. QUY TẮC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

**Loại 1:** Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng  $(a; b)$ , nũa khảng  $[a; )$ ,  $(a; b]$ .

**B1:** Tính  $f'(x)$ .

**B2:** Xét dấu  $f'(x)$  và lập bảng biến thiên.

**B3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

**Loại 2:** Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số **liên tục trên một đoạn**  $[a; b]$ .

**B1:** Tính  $f'(x)$ .

**B2:** Giải phương trình  $f'(x) = 0$  tìm được các nghiệm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên  $[a; b]$  (nếu có).

**B3:** Tính  $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ .

**B4:** So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max \{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \}$$

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min \{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \}$$

### III. VÍ DỤ

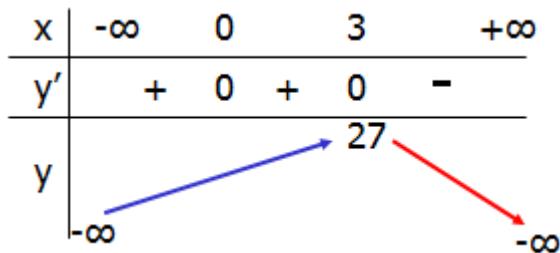
**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x)=4x^3-x^4$ . Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên  $\mathbb{R}$

**Giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = 12x^2 - 4x^3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x=0, x=3$$



Vậy  $\max f(x) = 27$ ;  $\min f(x)$  không tồn tại trên  $\mathbb{R}$

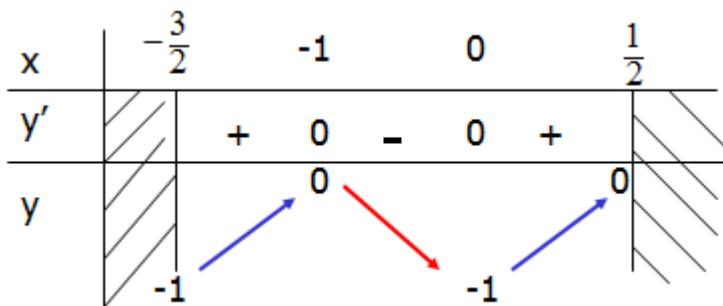
**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $f(x)=2x^3+3x^2-1$  tìm GTLN, GTNN của  $f(x)$  trên:

a)  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$       b) (-2, 1)

**Giải**

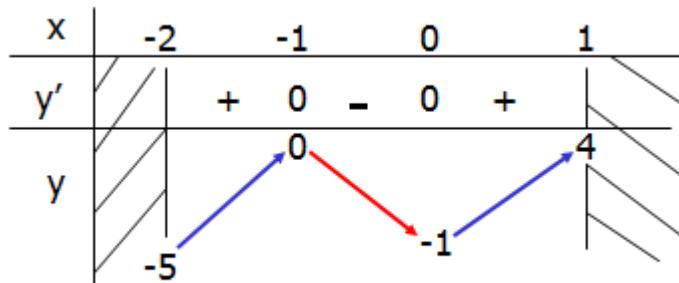
a)  $y' = 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

Xét trên khoảng  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Vậy Max  $f(x)=0$  đạt tại  $x=-1$ ; min  $f(x)=-1$  đạt tại  $x=0$

b) Xét trên khoảng (-2; 1)



Vậy hàm số không có GTLN, GTNN trên (-2, 1)

**Nhận xét.**

GTLN, GTNN của một hàm số trên khoảng có thể có, có thể không.

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $y = f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$  trên  $[-1;1]$

**Giải.**

Xét trên  $[-1;1]$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{x}=2 \text{ loại})$$

$$\text{Tính : } f(-1) = -7; f(0) = 1; f(1) = -3.$$

$$\text{Vậy : } \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1 \quad ; \quad \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = -7$$

**Ví dụ 4.** Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$  trên:

- a)  $[-2,1]$       b)  $[1,3)$

**Giải:**

a) Xét trên  $[-2,1]$

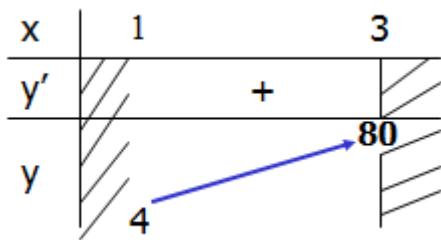
$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 0 \quad \begin{cases} x=0(n) \\ x=-1(n) \end{cases}$$

$$\text{Tính } f(-2) = -5; f(-1) = 0; f(0) = -1; f(1) = 4.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;1]} f(x) = f(1) = 4; \quad \min_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = -5.$$

b) Xét trên  $[1;3)$

Ta có bảng biến thiên



$$\text{Vậy } \min_{[1;3)} f(x) = f(1) = -1; \quad \max_{[1;3)} f(x) \text{ không tồn tại.}$$

**Ví dụ 5.** Cho hàm số  $y = \sqrt{2x} + \sqrt{6-x}$ . Tìm GTLN, GTNN của hàm số.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 6]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}}$$

$$\bullet y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2\sqrt{6-x} \Leftrightarrow 2x = 4(6-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$y(0) = \sqrt{6}; \quad y(6) = 2\sqrt{3}; \quad y(4) = 3\sqrt{2}$$

Vậy GTNN là  $\sqrt{6}$ , GTLN là  $3\sqrt{2}$

#### IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ . Giá trị lớn nhất trên đoạn của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

A. 2

B. 11

C. 0

D. 3

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x + 5$ . Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A.  $\max_{[0;2]} y = 5$

B.  $\min_{[0;2]} y = 3$

C.  $\max_{[-1;1]} y = 3$

D.  $\min_{[-1;1]} y = 7$

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ . Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A.  $\max_{[-1;0]} y = \frac{1}{2}$

B.  $\min_{[-1;2]} y = \frac{1}{2}$

C.  $\max_{[-1;1]} y = \frac{1}{2}$

D.  $\min_{[3;5]} y = \frac{11}{4}$

Câu 4. Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ . Giá trị lớn nhất trên đoạn của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

- A. 2      B. 11      C. 0      D. 3

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x\sqrt{1-x^2}$  là:

- A. 2      B. 1.      C.  $-\frac{1}{2}$ .      D. -1.

Câu 6. Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$ . Chọn phương án đúng trong các phương án sau

A.  $\max_{[0;1]} y = -1$

B.  $\min_{[0;1]} y = 0$

C.  $\max_{[-2;0]} y = 3$  D.  $\min_{[0;1]} y = -1$

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  là:

A. 2

B. 3

C. 4.

D. 5.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1000$  trên  $[-1; 0]$

A. 1001

B. 1000

C. 1002

D. -996

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$  là

A. 0

B. 4

C. -2

D. 2

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + x}$  là

- A. 0      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       D. 2

Câu 11. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ . gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-4; -2]$ . Tính  $M + m$

- A. -6      B. -1      C. -11      D. -10

Câu 12. Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x+2}$ , giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 2]$  là

- A.  $\frac{9}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 2      D. 0

Câu 13: Hàm số  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$  có GTLN trên đoạn  $[0;2]$  là:

- A.  $-1/3$       B.  $-13/6$       C.  $-1$       D.  $0$

Câu 14. Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 4x$ . Chọn phương án đúng trong các phương án sau

- A.  $\max_{[0;2]} y = 5$       B.  $\min_{[0;2]} y = 0$       C.  $\max_{[-1;1]} y = 3$       D.  $\min_{[-1;1]} y = 7$

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  là :

- A. 2      B. 3      C. 4.      D. 5.

**Câu 16.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - 3x$  trên  $[-2; 0]$  là

A.  $\frac{5}{3}$

B. 0

C.  $-\frac{2}{3}$

D. 3

**Câu 17.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 3x} + 5$  là

A.  $\frac{29}{4}$

B. -5

C. 5

D.  $\frac{13}{2}$

**Câu 18.** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x}$  là

A. 0 và  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và 1

C. 0 và  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. 1 và

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 19. Cho hàm số  $y = x + \frac{1}{x-2}$ , giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 1]$  là

A.  $\frac{9}{4}$

B.  $-\frac{1}{3}$

C. 0

D.  $-\frac{4}{3}$

Câu 20. Gọi M là GTLN và m là GTNN của hàm số  $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ , chọn phương án đúng trong các phương án sau:

- A. M = 2; m = 1      B. M = 0, 5; m = - 2      C. M = 6; m = 1      D. M = 6; m = - 2

Câu 21. Hàm số  $y = \frac{2x-m}{x+1}$  đạt giá trị lớn nhất trên đoạn  $[0; 1]$  bằng 1 khi

A. m=1

B. m=0

C. m=-1

D. m= 2

Câu 22. GTLN và GTNN của hàm số  $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$  trên đoạn  $[2; 4]$  lần lượt là  
A. -3 và -5      B. -3 và -4      C. -4 và -5      D. -3 và -7

Câu 23. GTLN và GTNN của hàm số  $y = f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x+2}$  trên đoạn  $[-1; 2]$  lần lượt là  
A. -1 và -3      B. 0 và -2      C. -1 và -2      D. 1 và -2

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x + \sqrt{4 - x^2}$   
A.  $2\sqrt{2}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  .      C. -2.      D. 2 .

**Câu 25.** GTLN và GTNN của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{4x - x^2}$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$  lần lượt là

- A. 2 và  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       B. 2 và  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C. 2 và  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D. 3 và  $\frac{\sqrt{11}}{2}$
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

**Câu 26.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .

- A. 0.      B. 1.      C. -1.      D.  $\sqrt{2}$ .
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

**Câu 27.** GTLN và GTNN của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  trên đoạn  $[-1; 1]$  lần lượt là

- A. 3 và 2      B. 3 và 0      C. 2 và 1      D. 3 và 1
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

**Câu 28.** GTLN và GTNN của hàm số  $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$  lần lượt là

- A.  $2\sqrt{2}$  và 2      B.  $2\sqrt{2}$  và -2      C. 2 và -2      D.  $\sqrt{2}$  và -2
- 
- 
- 
- 
- 
- 
-

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{25 - x^2}$  trên đoạn  $[-3; 4]$  là:

A. 3

B. 0

C. 5

D. 4

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$  là:

A.  $+\infty$

B. 6

C. 2

D. 3

**Câu 31. (Đề THPTQG 2017).** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min y = 3$  [2:4]

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $m < -1$ .      **B.**  $3 < m \leq 4$ .      **C.**  $m > 4$ .      **D.**  $1 \leq m < 3$ .

**Câu 32. (Minh Họa 2019-2020).** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn

$[-1; 2]$  bằng

- A. 1                      B. 37                      C. 33                      D. 12.

**Câu 33. (Mã đề 108 THPT QG 2019).** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  trên

$[-3; 3]$  băng:

- A. 4      B. 0      C. 20      D. -16

Câu 34. (Đề 103 THPT.QG - 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^4 - x^2 + 13$  trên đoạn  $[-2; 3]$

A.  $m = \frac{51}{4}$

B.  $m = \frac{49}{4}$

C.  $m = 13$

D.  $m = \frac{51}{2}$

Câu 35. (Đề tham khảo - THPT.QG 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$  trên đoạn  $[-2; 3]$  bằng:

A. 50

B. 5

C. 1

D. 122

Câu 36. (Đề 102 THPT.QG 2018). Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - 7x$  trên đoạn  $[0; 4]$  bằng

A. -259

B. 68

C. 0

D. -4

**Câu 37. (Đề 104 THPTQG2017).** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  trên đoạn

$$\left[ \frac{1}{2}; 2 \right]$$

A.  $m = \frac{17}{4}$

B.  $m = 10$

C.  $m = 5$

D.  $m = 3$

**Câu 38. (Đề 103 THPT.QG - 2018).** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2$  trên đoạn  $[-4; -1]$

bằng:

A. -4

B. -16

C. 0

D. 4

**Câu 39. (Đề 104 THPT.QG 2018 ).** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - x^2 + 13$  trên đoạn  $[-1; 2]$

bằng:

A. 25

B.  $\frac{51}{4}$

C. 13

D. 85

**Câu 40. (Đề 101 THPT.QG - 2018).** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 9$  trên đoạn  $[-2; 3]$  bằng

- A. 201.      B. 2      C. 9.      D. 54.
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

**Câu 41. (Đề 101 THPT.QG - 2017).** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  trên đoạn  $[0; 2]$

- A.  $m = 11$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = -2$ .      D.  $m = 3$ .
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

**Câu 42. (Đề 102, THPT.QG - 2017).** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  trên đoạn  $[0; \sqrt{3}]$

- A.  $M = 9$ .      B.  $M = 8\sqrt{3}$ .      C.  $M = 1$ .      D.  $M = 6$
- 
- 
- 
- 
- 
- 
-

**Câu 43. (Đề minh họa 1 THPT.QG - 2017).** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 4]$

- A.**  $\min_{[2;4]} y = 6$ .      **B.**  $\min_{[2;4]} y = -2$ .      **C.**  $\min_{[2;4]} y = -3$ .      **D.**

$$\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$$

**Câu 44. (Đề minh họa 3, THPT.QG - 2017).** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$

- A.**  $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ .    **B.**  $\min_{(0;+\infty)} y = 7$             **C.**  $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$         **D.**  
 $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

**Câu 45. (Đề minh họa 3 THPT.QG -2017).** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $y_{CD} = 5$       **B.**  $y_{CT} = 0$   
**C.**  $\min_{\mathbb{R}} y = 4$       **D.**  $\max_{\mathbb{R}} y = 5$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$		5		$-\infty$

The graph shows a curve starting from the left at a very high positive value, approaching a local minimum at  $(0, 4)$ , reaching a local maximum at  $(1, 5)$ , and then descending back towards negative infinity as it moves to the right.

Câu 46. Trên khoảng  $(0; +\infty)$  thì hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$ :

- A. Có giá trị nhỏ nhất là Min  $y = 3$       B. Có giá trị lớn nhất là Max  $y = -1$   
C. Có giá trị nhỏ nhất là Min  $y = -1$       D. Có giá trị lớn nhất là Max  $y = 3$

Câu 47. Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  là :

- A. 1      B. -1      C. 1 / 3      D. 3

Câu 48. Cho hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ . Giá trị lớn nhất của hàm số bằng

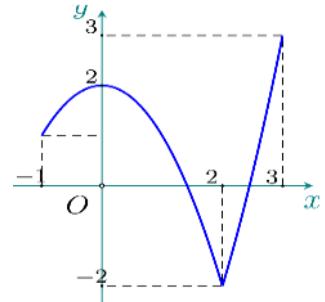
- A. 1      B. 2      C.  $\sqrt{3}$       D. 0

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
**Câu 49.** Cho hình chữ nhật có diện tích bằng  $100(cm^2)$ . Hỏi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

- A.  $10cm \times 10cm$       B.  $20cm \times 5cm$       C.  $25cm \times 4cm$       D. Đáp án khác
- .....
- 
- .....
- 
- .....
- 
- .....
- 
- .....

**Câu 50. ( THPT 2019 )** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ .

- A. 3, 2      B. 3, -2      C. 3, -1      D. 2, -2.
- .....
- 
- .....
- 
- .....
- 
- .....
- 
- .....



Chúc các em thành công !.