



PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

I. Phương trình mũ cơ bản

1. Định nghĩa: Phương trình $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) gọi là phương trình mũ cơ bản.

Nếu $b > 0$ phương trình có một nghiệm duy nhất $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Nếu $b \leq 0$ phương trình vô nghiệm

Chú ý: $a^{u(x)} = b \Leftrightarrow u(x) = \log_a b$ với ($a > 0, a \neq 1, b > 0$)

2. Phương pháp giải phương trình mũ

a. Đưa về cùng cơ số (dạng 1) $a^M = a^N \Leftrightarrow M = N$

hoặc có thể giải nhanh $a^u = b \Leftrightarrow u = \log_a b; (a > 0, a \neq 1, b > 0)$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau: $2^{x^2+3x-2} = \frac{1}{4}$

Giải:

Cách 1: $2^{x^2+3x-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2} = 2^{-2}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 0, x = -3$

Cách 2: giải nhanh:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} = 3$

Giải:

Cách 1: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} = 3 \Leftrightarrow 3^{-(x^2-3x+1)} = 3^1$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 3x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1, x = 2$

Cách 2: giải nhanh:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$

Giải:

Cách 1: $2^{x+1} + 2^{x-2} = 36 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{4} = 36$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot 2^x = 36 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1, x = 2$

Cách 2: giải nhanh:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ví dụ 4: Giải phương trình sau: $5^x \cdot 2^{2x-1} = 50$

Giải:

$$5^x \cdot 2^{2x-1} = 50 \Leftrightarrow 5^x \cdot \frac{4^x}{2} = 50 \Leftrightarrow 20^x = 100 \Leftrightarrow x = \log_{20} 100$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \log_{20} 100$

Tương tự giải nhanh các phương trình sau:

$$3^{x+1} = 5$$

$$4^{2x-3} = 7$$

.....
.....
.....
.....

.....
.....

b. Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số (Dạng 2)

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau: $3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0$

Giải:

$$3^8.3^{2x} - 4.3^5.3^x + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6561.(3^x)^2 - 972.3^x + 27 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = 3^x > 0$

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow 6561t^2 - 972t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \\ t = \frac{1}{27} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -2, x = -3$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau: $25^x - 2.5^x - 15 = 0$

Giải:

$$25^x - 2.5^x - 15 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 2.5^x - 15 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = 5^x > 0$

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau: $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24$

Giải:

$$3^{x+2} - 3^{2-x} = 24 \Leftrightarrow 9.3^x - \frac{9}{3^x} - 24 = 0 \Leftrightarrow 9.(3^x)^2 - 24.3^x - 9 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = 3^x > 0$

$$\text{Pt } (*) \Leftrightarrow 9t^2 - 24t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$

Dạng 2: (tất cả mũ có ẩn)

$$\begin{cases} ma^{2x} + n a \cdot b^x + pb^{2x} = 0 \\ ma^{2f(x)} + n a \cdot b^{f(x)} + pb^{2f(x)} = 0 \end{cases}$$

*** Cách giải :** Chia hai vế của pt cho a^{2x} hoặc b^{2x} ; ($a^{2f(x)}$ hoặc $b^{2f(x)}$)

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

1) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

.....

2) $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 7^{2x} = 0$

.....

3) $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$

.....

c. Lấy logarit hai vế (dạng 3)

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $8^x \cdot 5^{x^2-1} = \frac{1}{8}$

Giải: Lấy logarit hai vế với cơ số 8, ta được

$$8^x \cdot 5^{x^2-1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_8(8^x \cdot 5^{x^2-1}) = \log_8\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_8 8^x + \log_8 5^{x^2-1} = \log_8 8^{-1} \Leftrightarrow x + (x^2 - 1) \log_8 5 = -1$$

$$\Leftrightarrow x+1+(x^2-1)\log_8 5=0 \Leftrightarrow (x+1)+(x+1)(x-1)\log_8 5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[1+(x-1)\log_8 5]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 1+(x-1)\log_8 5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x.\log_8 5=\log_8 5-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1-\log_5 8 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-1, x=1-\log_5 8$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

Giải: Lấy logarit hai vế với cơ số 3, ta được

$$3^x \cdot 2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow \log_3(3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_3 1$$

$$\Leftrightarrow x + x^2 \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x \log_3 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x\log_3 2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{\log_3 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\log_2 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=0, x=-\log_2 3$

d. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ, nhằm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

Ta thường sử dụng các tính chất sau:

Tính chất 1: Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = C$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = C$)

Tính chất 2: Nếu hàm f tăng trong khoảng $(a;b)$ và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$)

Ví dụ: Giải các phương trình sau: $3^x + 4^x = 5^x$

Giải:

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 (*)$$

Ta có $x=2$ là nghiệm của phương trình (*) vì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

$$\text{xét } f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Ta có $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ **luôn nghịch biến** trên \mathbb{R}

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất $x=2$

II. Phương trình logarit

1. **Định nghĩa:** Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là phương trình logarit có bản.

Theo định nghĩa ta có:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b \text{ mở rộng } \log_a u = b \Leftrightarrow u = a^b \text{ (u là hàm hợp)}$$

2. Phương pháp giải phương trình logarit

a. Đưa về cùng cơ số (dạng 1):

$$\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N \text{ hoặc giải nhanh } \log_a u = b \Rightarrow u = a^b$$

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\log_2 x + \log_2(x+3) = \log_2 4$

Giải: $\log_2 x + \log_2(x+3) = \log_2 4$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Pt (1) $\Leftrightarrow \log_2 x(x+3) = \log_2 4 \Leftrightarrow x(x+3) = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 1$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\log_2 x + \log_2 x^2 = \log_2 9x$

Giải: $\log_2 x + \log_2 x^2 = \log_2 9x$ (1)

Điều kiện: $x > 0$

Pt (1) $\Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2 x = \log_2 9 + \log_2 x \Leftrightarrow 2\log_2 x = \log_2 9$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 9 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$

b. Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số (dạng 2)

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau: $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$

Giải: $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$

Điều kiện: $x > 0$

Pt $\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$

Pt (1) $\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2, x = \frac{1}{4}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau: $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

Giải: $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad (*)$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 1 + \log_2(x-1) = \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} \Leftrightarrow 1 + \log_2(x-1) = \frac{2}{\log_2(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow [\log_2(x-1)]^2 + \log_2(x-1) - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2(x-1)$

$$\text{Pt (1)} \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) = 1 \\ \log_2(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ x-1 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \text{ thỏa } (*)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3, x = \frac{5}{4}$

c. Mũ hóa hai vế (dạng 3)

Ví dụ: $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

Giải:

Điều kiện: $3^x - 8 > 0$

Lấy mũ 3 hai vế ta được phương trình

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x \Leftrightarrow 3^{\log_3(3^x - 8)} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 8 = 3^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1(\text{loại}) \\ 3^x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

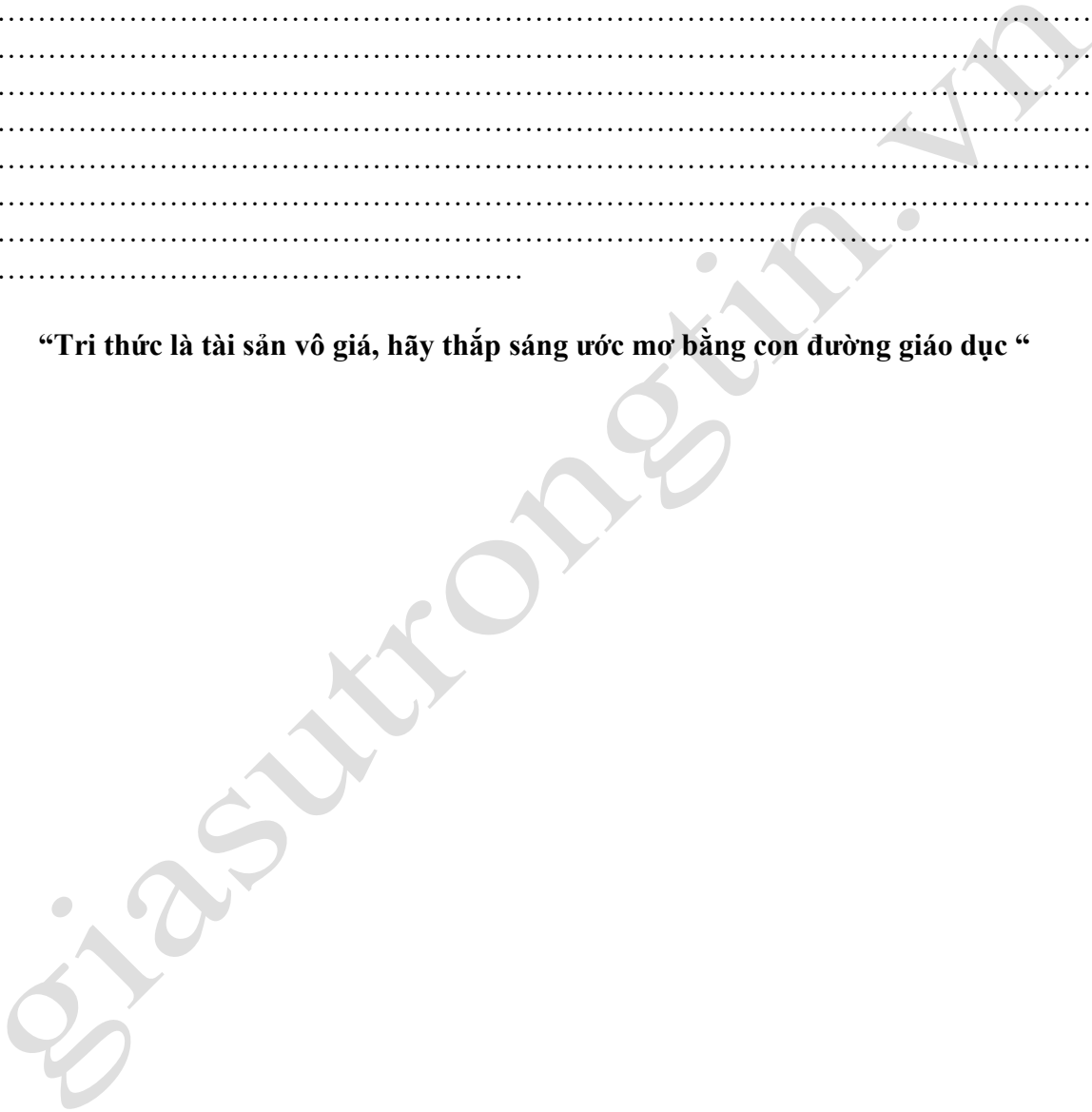
Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

Tương tự giải phương trình sau: $\log_2^{(5-2^x)} = 2 - x$

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

“Tri thức là tài sản vô giá, hãy thắp sáng ước mơ bằng con đường giáo dục “



§5

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1). Giải phương trình $3^{x-1} = 4$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{1 - \log_4 3\}$. B). $\{1 - \log_3 4\}$. C). $\{1 + \log_4 3\}$. D). $\{1 + \log_3 4\}$.
-
-
-

2). Giải phương trình $2^{x^2-2x-6} = 4$. Ta có tổng các nghiệm của phương trình bằng:

- A). 1 B). 2 C). 3 D). 4
-
-
-

3). Giải phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Ta có tích các nghiệm bằng:

- A). 2. B). 3. C). 4. D). 2.
-
-
-

4). Giải phương trình $3^x + 6^x = 2^x$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{1\}$. B). $\{2\}$. C). \emptyset . D). $\{-1\}$.
-
-
-

5). Giải phương trình $\sqrt{3^x + 6} = 3^x$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{-1, 1\}$. B). $\{1\}$. C). $\{0, -1\}$. D). $\{0, 1\}$.
-
-
-

6). Giải phương trình $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{1, -2\}$. B). $\{-1, -2\}$. C). $\{-1, 2\}$. D). $\{1, 2\}$.
-
-
-

A. 2

B. 4

C. 20

D. 8

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

19). Cho phương trình $\log_2(x^3 + 1) - \log_2(x^2 - x + 1) - 2\log_2 x = 0$. Phát biểu nào sau đây đúng:

- A.** $x \neq 0$ **B.** $x > 0$ **C.** $x > -1$ **D.** $x \in \mathbb{R}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

20). Phương trình: $\log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$ có tập nghiệm là:

- A.** $\left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{1; -2\}$ **D.** $\left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

21). Số nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là:

- A. 0** **B. 3** **C. 2** **D. 1**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

22). Tập nghiệm phương trình: $\log_3^2(4 - x) - 2\log_{\frac{1}{3}}(4 - x) = 15$ là:

A. $\{5; -3\}$

B. $\{3^5; 3^{-3}\}$

C. $\left\{\frac{971}{243}; -23\right\}$

D. $\left\{-239; \frac{107}{27}\right\}$

23). Phương trình: $\log(x^2 - 7x + 12) = \log(2x - 8)$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

24). Tìm m để phương trình $4^x - 2(m - 1).2^x + 3m - 4 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

A). $m = \frac{5}{2}$.

B). $m = 4$.

C). $m = \frac{7}{3}$.

D). $m = 2$.

25). Giải phương trình $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$. Ta có tập nghiệm bằng:

A). $\{0, -1\}$.

B). $\{0\}$.

C). $\{1\}$.

D). $\{2\}$.

26). Tìm m để phương trình $4^x - 2(m + 1) \cdot 2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A). $-1 < m < 9$. B). $m < \frac{8}{3}$. C). $\frac{8}{3} < m < 9$. D). $m < 9$.

27). Giải phương trình $6^x + 8 = 2^{x+1} + 4 \cdot 3^x$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{1, \log_3 4\}$. B). $\{2, \log_3 2\}$. C). $\{2, \log_2 3\}$. D). $\{1, 2\}$.

28). Tìm m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có đúng 2 nghiệm.

- A). $m = 3$. B). $m = 2$. C). $m > 3$. D). $2 < m < 3$.

29). Giải phương trình $3^{x+1} = 10 - x$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{1, 2\}$. B). $\{1, -1\}$. C). $\{1\}$. D). $\{2\}$.

30). Giải phương trình $(x + 4).9^x - (x + 5).3^x + 1 = 0$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\{0, -1\}$. B). $\{0, 2\}$. C). $\{1, 0\}$. D). $\{1, -1\}$.

31). Tìm m để phương trình $9^x + \frac{54}{3^x} + 3 = m$ có nghiệm.

- A). $m \geq 30$. B). $m \geq 27$. C). $m \geq 18$. D). $m \geq 9$.

32). Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+3} + 3 = m$ có đúng 1 nghiệm.

- A). $m > -13$. B). $m \geq 3$. C). $m = -13$ v $m \geq 3$. D). $m = -13$ v $m > 3$.

33). Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+1} = m$ có nghiệm.

- A). $-1 \leq m \leq 0$. B). $m \geq 1$. C). $m \geq 0$. D). $m \geq -1$.

34). Tìm m để phương trình $4^x - 2^x + 6 = m$ có đúng 1 nghiệm $x \in [1; 2]$.

- A). $m \geq 8$. B). $8 \leq m \leq 18$. C). $8 < m < 18$. D). $m = \frac{23}{4}$ v $8 < m < 18$.

35). Giải phương trình $2^{x+3} + 3^{x-1} = 2^{x-1} + 3^x$. Ta có tập nghiệm bằng:

- A). $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{51}{8} \right) \right\}$. B). $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4}{45} \right) \right\}$. C). $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{45}{4} \right) \right\}$. D). $\left\{ \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{8}{51} \right) \right\}$.

36). Tìm m để phương trình $9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2} + 6 = m$ có đúng 2 nghiệm.

- A). $2 < m \leq 3$. B). $m \geq 3$ v $m = 2$. C). $m > 3$ v $m = 2$. D). $2 < m < 6$.

37). Phương trình: $4 \log_{25} x + \log_x 5 = 3$ có nghiệm là:

- A. $x = 5; x = \sqrt{5}$ B. $x = 1; x = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{5}; x = 5$ D. $x = \frac{1}{5}; x = \sqrt{5}$

38). Phương trình $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ tương đương với phương trình nào dưới đây

- A. $9 - 2^x = 3 - x$ B. $x^2 - 3x = 0$ C. $x^2 + 3x = 0$ D. $9 - 2^x + 3 = 2^{-x}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

39). Tìm m để phương trình $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 3 nghiệm lớn hơn -1.

- A. $\frac{1}{2^9} < m < 1$ B. $\frac{1}{2^9} \leq m < 1$ C. Đáp án khác D. $\frac{1}{25} < m < 1$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

40). Số nghiệm phương trình $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(10x - 5) = 0$ là:

- A. 3 B. Vô nghiệm C. 1 D. 2

.....
.....
.....
.....
.....
.....