



TÍCH PHÂN

I - KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a ; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

Vậy
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

CHÚ Ý

Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x)dx = 0 ; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân sau

$$1) \int_1^2 2x dx = x^2 \Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 ;$$

$$2) \int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Nhận xét

Tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t .

2. Tính chất tích phân

Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbf{K} và a, b, c là ba số thuộc \mathbf{K} .

$$\begin{aligned} 1) \int_a^a f(x)dx &= 0 & 2) \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ 3) \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx & 4) \int_a^b k \cdot f(x)dx &= k \int_a^b f(x)dx \\ 5) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a) $\int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 2)dx =$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

b) $\int_0^1 (x\sqrt{x} + 3^{2x+1})dx =$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 4 \cos 2x)dx =$

.....
.....
.....
.....

d) Cho $\int_0^2 f(x)dx = 6$, $\int_0^5 f(x)dx = 10$, tính $\int_2^5 f(x)dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

e) Cho biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $\int_1^5 f(x)dx = 12$, $F(1) = 7$, tìm $F(5)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

f) Cho biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ thỏa $F(2) = 8$, tìm $F(4)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

g) Cho biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + 1}$ thỏa $F(1) = 3$, tìm $F(2)$.

.....
.....
.....
.....

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến

ĐỊNH LÝ

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha ; \beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha ; \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau.

a) $I = \int_0^1 2xe^{x^2+1} dx =$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

b) $I = \int_1^2 \frac{4x - 2}{(x^2 - x + 1)^5} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{d) } I = \int_0^1 (2x - 1)(x^2 - x + 3)^7 dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{e) } I = \int_0^2 (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 1} dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Phương pháp tích phân từng phần

Nhận dạng: $\int_a^b f(x).g(x)dx$ hoặc $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx$

Trong đó $f(x)$ và $g(x)$ khác loại.

Giải

$$I = \int_a^b f(x).g(x)dx$$

$$\text{Đặt } u = f(x) \quad \Rightarrow du = f'(x)dx$$

$$dv = g(x)dx \quad \Rightarrow v = \int g(x)dx$$

$$I = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Chú ý: thứ tự chọn u theo quy tắc **log – đa – mũ – lượng.**

Ví dụ: Tính các tích phân sau.

a) $I = \int_0^1 xe^x dx =$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx =$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f) I = \int_1^e (x+1) \cdot \ln x dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$g) I = \int_1^e x \ln x dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Chúc các em thành công !



TÍCH PHÂN

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính tích phân sau: $\int_2^4 (x + \frac{1}{x})^2 dx$

A. $\frac{275}{12}$

B. $\frac{270}{12}$

C. $\frac{265}{12}$

D. $\frac{255}{12}$

Câu 2: Tính tích phân sau: $\int_0^2 (x\sqrt{x} - x) dx$

A. $\frac{8\sqrt{2}}{5} + 2$

B. $\frac{8\sqrt{2}}{5} - 2$

C. $\frac{8\sqrt{2}}{5} - 3$

D. $\frac{8\sqrt{2}}{3} - 2$

Câu 3. (2019 - đề 101)

Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 36$

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Câu 4: Tính tích phân sau: $\int_0^1 (e^{2x} + \frac{3}{x+1})dx$ bằng $\frac{e^2}{2} + a \ln 2 + b$ Giá trị của a+b là:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 5: Tính tích phân sau: $\int_{-2}^0 (x - e^{-x})dx$

- A. $1 - e^2$ B. $-1 + e^2$ C. $1 + e^2$ D. $-1 - e^2$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 6. (2017 - đề 102)

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

- A. $I = e$. B. $I = \frac{1}{e}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 7: Tính tích phân sau: $\int_0^2 (x\sqrt{x} - x)dx$

- A. $\frac{8\sqrt{2}}{5}+2$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{5}-2$ C. $\frac{8\sqrt{2}}{5}-3$ D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}-2$
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

Câu 8: Tính tích phân sau: $\int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2 dx$

- A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

Câu 9. (2019 - đề 102)

Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

Câu 10: Tính tích phân sau: $\int_1^2 \left(\frac{3}{1-2x}\right) dx$

- A. $3\ln 2 + \frac{1}{2}$ B. $\frac{-3\ln 3}{2}$ C. $-3\ln 2 + \frac{3}{2}$ D. $-3\ln 2 + \frac{1}{2}$

A. 32

B. 12

C. 24

D. 2

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Câu 18: Tìm giá trị của a sao cho $\int_0^a \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$

A. $a = \frac{\pi}{2}$

B. $a = \frac{\pi}{3}$

C. $a = \frac{\pi}{4}$

D. $a = \pi$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Câu 19: Cho $I = \int_2^a \frac{x+1}{x} dx = e$. Khi đó, giá trị của a là:

A. $\frac{2}{1-e}$

B. e

C. $\frac{e}{2}$

D. $\frac{-2}{1-e}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Câu 20 (2019 -105): Cho $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn: $\int_0^{10} f(x) dx = 7$,

$\int_2^6 f(x) dx = 3$. Khi đó, $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$ có giá trị là:

Câu 23 (thi thử 2019). Nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$, $\int_b^d f(x)dx = 2$, với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng:
 A. -2 B. 8 C. 3 D. 0

.....

Câu 24 (MH 2017). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x)dx$

- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 3$. D. $I = \frac{7}{2}$.

.....

Câu 25 (102). Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$

A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

.....

Câu 26. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. $I = 7$.

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 5 + \pi$.

Câu 27. (MH 2019) Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^2 \sqrt{u} du$.

B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$.

C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$.

Câu 28. [MH2 – 2018] Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1$.

B. $F(3) = \ln 2 + 1$.

C. $F(3) = \frac{1}{2}$.

D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Câu 29. Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x)dx$

A. $I = 32$.

B. $I = 8$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

Câu 30: Tìm $a > 0$ sao cho $\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx = 4$

A. $a = 2$

B. $a = 1$

C. $a = 3$

D. $a = 4$

Câu 31. [MH2019] Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. -3 .

B. 12 .

C. -8 .

D. 1 .

Câu 32. (Mã đề 101 - 2018) $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$

B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$

C. $e^5 - e^2$

D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$

Câu 33: (MH1 - 2017) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$:

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$

C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$

D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$

Câu 34: (Đề thử 2017) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$.
Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1$

B. $F(3) = \ln 2 + 1$

C. $F(3) = \frac{1}{2}$

D. $F(3) = \frac{7}{4}$

Câu 38. (MH 2019) Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. -8 B. 1 C. -3 D. 12

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)dx = 9$; $\int_2^4 f(x)dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x)dx.$$

- A. $I = 5$. B. $I = 36$. C. $I = \frac{9}{4}$. D. $I = 13$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 40. Cho $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$ $\int_0^3 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

- A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Câu 44. (2018 - 102) Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \text{ đồng thời } \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$$

A. 9.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 45. (2017 - 103) Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$

A. $I = \frac{17}{2}$

B. $I = \frac{5}{2}$

C. $I = \frac{7}{2}$

D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 46. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính

$$I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$$

A. 13.

B. 27.

C. -11.

D. 3.

Câu 47. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

Câu 48. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$, $\int_0^2 g(x)dx = -1$ thì $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]dx$ bằng:

- A. 12. B. 0. C. 8. D. 10

Câu 49. Cho $\int_0^5 f(x)dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2]dx$ bằng

- A. -140. B. -130. C. -120. D. -133.

Câu 50. (2020 - 114) Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

- A. 1. B. -3. C. 3. D. -1.